Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. a) Einheitssphäre

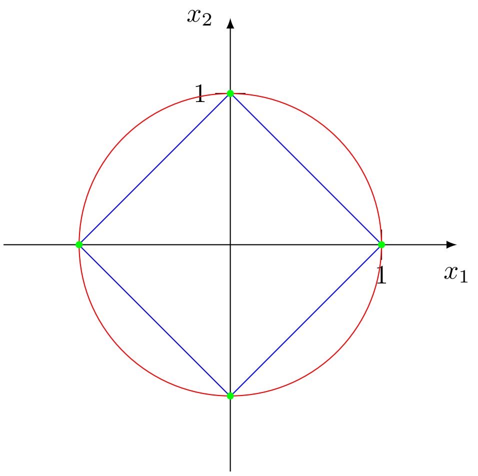

Abbildung 1: Blau: $\|\cdot\|_1$, Rot: $\|\cdot\|_2$, Grün: $\|\cdot\|_\infty$

b) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann ist

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k \cdot 1| \overset{\text{C.S.U.}}{\leq} \|x\|_2 \cdot \|1\|_2 = \sqrt{n}\|x\|_2$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n \|x_\infty\|^2} = \sqrt{n\|x\|_\infty^2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

Außerdem ist

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| = \|x\|_2 \left(\sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{|x_k|}{\|x\|_2}}_{\leq 1} \right) \geq \|x\|_2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{|x_k|^2}{\|x\|_2^2} \right) = \|x\|_2 \frac{\|x\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \|x\|_2$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \geq \sqrt{\|x\|_\infty^2} = \|x\|_\infty.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 &\leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \\
\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 &\leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \\
\|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \\
\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 &\leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \\
\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \leq n\|x\|_\infty \\
\|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty.
\end{aligned}$$

Für $n = 1$ sind alle Abschätzungen scharf, denn dann ist $\|x\|_1 = \|x\|_2 = \|x\|_\infty$ und $\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} = 1$.

Es gilt $n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $\sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ und $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Aufgabe 2.

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x}.$$

a) Es ist

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{x\sin x - 1 + \cos x}{x^2}.$$

Damit folgt

$$k = \frac{x\sin x - 1 + \cos x}{1-\cos x}.$$

Für $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ist

$$k = \frac{x-1}{1} = x - 1 \xrightarrow{k\to\infty} \infty,$$

also f schlecht konditioniert.

b) Für die Rundungsfehler der einzelnen Operationen gilt für $|e_1|, |e_2|, |e_3| < \text{eps}$

$$\begin{aligned} a &= \cos(x)(1+e_1) \\ b &= (1-a)(1+e_2) \doteq 1 - \cos x + e_2 - (e_1+e_2)\cos x \end{aligned}$$

Damit folgt

$$f_a(x) \doteq \frac{1-\cos x + e_2 - (e_1 + e_2\cos x) + e_3 - e_3\cos(x)}{x}$$

Also

$$\frac{f_a(x) - f(x)}{f(x)} \doteq -\frac{\cos x}{1-\cos x}e_1 + e_2 + e_3.$$

Wegen $\frac{\cos x}{1-\cos x} \xrightarrow{x\to 0} \infty \gg k$ ist dieser Algorithmus numerisch instabil.

c) Durch Umformungen, lässt sich die auslöschende Subtraktion $1-\cos x$ vermeiden:

$$f(x) = \frac{\sin^2(x)}{x + x\cos(x)}.$$

Mit $|e_1|, |e_2|, |e_3|, |e_4|, |e_5|, |e_6| < \text{eps}$ folgt für die Rundungsfehler:

$$\begin{aligned} a &= \sin(x)(1+e_1) \\ b &= a^2(1+e_2) \doteq \sin^2(x) + \sin^2(x)(2e_1 + e_2) \\ c &= \cos(x)(1+e_3) \\ d &= xc(1+e_4) \doteq x\cos x + (e_3+e_4)x\cos(x) \\ e &= x + d(1+e_5) \doteq x + x\cos(x) + (e_3+e_4+e_5)x\cos(x) + e_4 x \end{aligned}$$

Damit folgt

$$f_a(x) \doteq \frac{\sin^2(x) + \sin^2(x)(2e_1+e_2) + e_6\sin^2(x)}{x + x\cos(x) + (e_3+e_4+e_5)x\cos(x) + e_4 x}$$

Also gilt

$$\frac{f_a(x) - f(x)}{f(x)} \doteq \frac{2e_1 + e_2 + e_6 - e_4 - (e_2+e_3)\frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}}{1 + e_4 + (e_2+e_3)\frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}} \overset{x\ll 1}{\approx} \frac{\frac{3}{2}e_1 + e_2 + e_6 - e_4 - \frac{1}{2}e_3}{1 + e_4 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3}.$$

Wegen $1+e_4+\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{2}e_3 > 1$, folgt, dass die Verstärkungsfaktoren der Rundungsfehler für $x \ll 1$ nahe 1 sind, also ist der Algorithmus numerisch stabil.

Aufgabe 3. a) Die Matrix ist eine $N^2 - 1 \times N^2 - 1$ Matrix, da eine Gleichung für jeden der N^2 Knoten, bis auf den Referenzknoten existiert.

b) Jeder Knoten hat entweder 2 (Ecken), 3 (Außenkanten) oder 4 (im Inneren) ein oder ausgehende Kanten. Die mit der Pumpe verbundenen Knoten, haben jeweils eine Kante mehr. Die zugehörigen Zeilen haben damit immer 1 + Anzahl der verbundenen Kanten Einträge ungleich 0.

c) Die Matrix ist quadratisch und hat vollen Rang und hat damit eine eindeutige Lösung, wenn $q_p \neq 0$.

d)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_p \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. a) Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} (A_s x, x)_2 &= \left(\frac{1}{2}Ax + \frac{1}{2}A^T x, x\right)_2 = \frac{1}{2}(Ax, x) + \frac{1}{2}(A^T x, x) = \frac{1}{2}x^T A^T x + \frac{1}{2}x^T Ax \\ &= \frac{1}{2}x^T A^T x + \frac{1}{2}\left(x^T (Ax)\right)^T = \frac{1}{2}x^T A^T x + \frac{1}{2}x^T A^T x = x^T A^T x = (Ax, x)_2. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

b) Sei $X \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ beliebig und A_X nicht positiv definit. Dann ex. ein $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^{|x|} \setminus \{0\}$ mit $A_X x \leq 0$. Dann ergänze $\widetilde{x}$ zu $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$x_i := \begin{cases} x_i & i \in X \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist $x^T Ax = \widetilde{x}^T A_X \widetilde{x} \leq 0$, also ist A nicht positiv definit.

c) Mit (a) folgt: A g.d. positiv definit, wenn

$$A_S = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\alpha}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

positiv definit ist. Dies ist mit dem Hauptminorenkriterium für symmetrische Matrizen g.d der Fall, wenn

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\alpha}{2} & 2 \end{vmatrix} &= 4 - \frac{\alpha^2}{4} > 0 \\ \iff 16 - \alpha^2 > 0 & \\ \iff |\alpha| < 4. & \end{aligned}$$

d) Zunächst ist $\overline{A}^T = \overline{\overline{H}^T H}^T = \left(H^T \overline{H}\right)^T = \overline{H}^T H = A$. Also ist A hermitesch.

Sei nun A positiv definit. Dann sind, wegen A hermitesch, alle Eigenwerte reell und positiv. Also gilt $\det(A) > 0$, damit $\mathrm{Rg}(A) = n$. Also

$$n = \mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(\overline{H}^T H) \leq \min\{\mathrm{Rg}(\overline{H}^T), H\} = \mathrm{Rg}(H) \leq \min\{n, m\} = n.$$

Also $\mathrm{Rg}(H) = n$.

Sei nun $\mathrm{Rg}(H) = n$. Es ist A semidefinit, denn $\forall x \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$(\overline{H}^T Hx, x)_2 = x^T \left(\overline{H}^T H\right)^T \overline{x} = x^T H^T \overline{H}\overline{x} = (Hx)^T \overline{(Hx)} \geq 0 \qquad (*).$$

Mit dem Rangsatz ist außerdem:

$$n = \dim(\mathbb{C}^n) = \mathrm{Rg}(H) + \dim \ker H = n + \dim \ker H \implies \dim \ker H = 0.$$

Also folgt $\forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$: $Hx \neq 0$, also folgt mit $(*)$ A positiv definit.