0.1 Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale

Satz 0.1 (Cauchy-Kriterium)**.** Es sei $-\infty < a < b \leq +\infty$ und $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar $\forall [a,c] \subset [a,b)$. Dann gilt: $\int_a^b f(x)dx$ konvergiert genau dann, wenn $\forall \epsilon > 0\ \exists a < b_\epsilon < b$ s.d. $\forall b_\epsilon < b_1 < b_2 < b$ gilt

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \epsilon.$$

Satz 0.2 (Majoranten-Minoranten Kriterium)**.** Seien $f, g, h\colon [a,b) \to \mathbb{R} (b \leq \infty)$ integrierbar $\forall [a,c] \subset [a,b)$ und $0 \leq h(x) \leq |f(x)| \leq g(x)\ \forall x \in [a,b)$. Dann gilt:

$$\int_a^b |f(x)|dx \begin{cases} \text{konvergent, falls } \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \text{ konvergent} \\ \text{divergent, falls } \int_a^b h(x)\ \mathrm{d}t \text{ divergent} \end{cases}.$$

Satz 0.3 (Grenzwertkriterium)**.** Seien $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}\ (b \leq \infty)$ integrierbar $\forall [a,c] \subset [a,b)$ und es ex. der Grenzwert $\lim_{t \nearrow b} \frac{f(t)}{g(t)} \in (0, +\infty)$ Dann sind die Integrale $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ und $\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$ entweder beide konvergent oder beide divergent.

Satz 0.4. Seien a_n, b_n positiv und $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} q \in (0,\infty)$. Dann sind $\sum_{k=1}^\infty a_n$ und $\sum_{k=1}^\infty b_n$ entweder beide konvergent oder beide divergent.

Satz 0.5 (Dirichlet-Kriterium)**.** Sei $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ in $[a,\infty)$ integrierbar und $\sup_{x\geq a} \left|\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t\right| = M < \infty$.

Sei $g\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}_+$ differenzierbar und monoton gegen Null fallend, dann ex. das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(t)g(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

Beispiel 0.6. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x$ mit $f(x) = \sin x$ und $g(x) = \frac{1}{x}$.

Beweis. f, g sind integrierbar, $f \cdot g$ auch integrierbar auf $[a,x] \subset [a,\infty)\ \forall x$. Das Integral $F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ ex. und ist Stammfunktion von f nach HDI.

Es gilt (partielle Integration)

$$\int_a^x f(t)g(t)\ \mathrm{d}t = F(t)g(t)\Big|_a^x - \int_a^x f(t)g'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann ex. $\beta_\epsilon > a$ s.d.

$$g(x) < \frac{\epsilon}{2M} \text{ für } x \geq \beta_\epsilon \quad g \text{ (monoton gegen Null fallend).}$$

und $g'(x) \leq 0$.

Sei $\beta > \alpha \geq \beta_\epsilon$

$$\begin{aligned} \left| \int_\alpha^\beta F(t)g'(t)\ \mathrm{d}t \right| &\leq M \int_\alpha^\beta |g'(t)|\ \mathrm{d}t \\ &= -M \int_\alpha^\beta g'(t)\ \mathrm{d}t \\ &= -Mg(t)\Big|_\alpha^\beta \\ &= -M(g(\beta) - g(\alpha)) = M(g(\alpha) - g(\beta)) \\ &\leq 2Mg(\alpha) \leq \epsilon \quad \forall \alpha \geq \beta_\epsilon. \end{aligned}$$

Nach Cauchy-Kriterium existiert

$$\lim_{x\to\infty}\int_a^x F(t)g'(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^\infty F(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to\infty}\underbrace{F(x)}_{\text{beschränkt}}\underbrace{g(x)}_{\xrightarrow{x\to\infty}0}-\lim_{x\to\infty}\underbrace{F(a)}_{=0}g(a)-\underbrace{\int_a^\infty F(t)g'(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{existiert}}.$$

$\Longrightarrow \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ existiert. $\square$

Satz 0.7 (Integralkriterium für Reihen)**.** Sei $f\colon[n_0,\infty)\to\mathbb{R}$ eine stetige monton fallende Funktion. Dann gilt:

$$\sum_{k=n_0}^\infty f(k)<\infty \iff \int_{n_0}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x<\infty.$$

Beweis. „ $\Longrightarrow$ " Die Reihe ist konvergent. Sei $n>n_0$, $n\in\mathbb{N}$

$$\int_{n_0}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=n_0}^n\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x\overset{f\text{ monoton fallend}}{\leq}\sum_{k=n_0}^n f(k)\cdot 1\leq\sum_{k=n_0}^\infty f(k)<\infty.$$

$\Longrightarrow \int_{n_0}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert.

„ $\Longleftarrow$ " $\int_{n_0}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0}^n f(k)&=f(n_0)+\sum_{k=n_0}^{n-1} f(k+1)\\&\leq f(n_0)+\sum_{k=n_0}^{n-1}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t\\&\leq f(n_0)+\int_{n_0}^\infty f(t)\,\mathrm{d}t<\infty\quad\forall n.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ die Reihe ist konvergent. $\square$