Aufgabe	A18	A19	A20	A21	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 18. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{n,n}(K)$ und $I_A := \{f \in K[t] \mid f(A) = 0\}$.

(a) Beh.: $I_A \subseteq K[t]$ ist ein Ideal und $\chi_A^{\text{char}} \in I_A$.

Beweis. I_A ist Ideal, denn

(I1) $0 \in I_A$, denn $0(A) = 0$.

(I2) Seien $f, g \in I_A$. Dann ist $(f+g)(A) = f(A) + g(A) = 0 + 0 = 0$, also $f + g \in I_A$.

(I3) Sei $f \in I_A$ und $r \in K[t]$. Dann ist $(f \cdot r)(A) = f(A) \cdot r(A) = 0 \cdot r(a) = 0 \implies rf \in I_A$.

Mit dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $\chi_A^{\text{char}}(A) = 0 \implies \chi_A^{\text{char}} \in I_A$. □

(b) Beh.: Es ex. ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom $\chi_A^{\min} \in K[t] \setminus \{0\}$ mit $I_A = \left(\chi_A^{\min}\right)$.

Beweis. Es ist $\chi_A^{\text{char}} \neq 0$ und $\chi_A^{\text{char}} \in I_A$, also $I_A \neq (0)$. Wegen $K[t]$ HIR ex. ein bis auf Assoziiertheit eindeutig bestimmtes Polynom $f \in K[t] \setminus \{0\}$ mit $(f) = I_A$. Da K Körper, ex. genau ein normiertes Polynom $\chi_A^{\min}$ mit $\chi_A^{\min} \mathrel{\hat{=}} f$ und damit $(\chi_A^{\min}) = I_A$. □

(c) Sei $\lambda \in K$. Beh.: $\chi_A^{\min}(\lambda) = 0 \iff \chi_A^{\text{char}}(\lambda) = 0$.

Beweis. Sei $\lambda \in K$ mit $\chi_A^{\text{char}}(\lambda) = 0$. Dann ist λ Eigenwert von A zu Eigenvektor $v \in K^n \setminus \{0\}$ mit $Av = \lambda v$. Für $f \in K[t]$ gilt dann:

$$\begin{aligned} f(A)v &= a_0 v + a_1 Av + \ldots + a_m A^m v \\ &= a_0 v + a_1 \lambda v + \ldots + a_m A^{m-1} \lambda v \\ &= a_0 v + a_1 \lambda v + \ldots + a_m \lambda^m v \\ &= f(\lambda) v \end{aligned}$$

Damit folgt

$$0 = \chi_A^{\min}(A)v = \chi_A^{\min}(\lambda)v.$$

Wegen $v \neq 0$, folgt $\chi_A^{\min}(\lambda) = 0$.

Sei nun $\chi_A^{\min}(\lambda) = 0$. Wegen $\chi_A^{\text{char}} \in (\chi_A^{\min})$ ex. ein $f \in K[t]$ mit $\chi_A^{\text{char}} = f \cdot \chi_A^{\min}$. Damit folgt

$$\chi_A^{\text{char}}(\lambda) = f(\lambda) \cdot \chi_A^{\min}(\lambda) = f(\lambda) \cdot 0 = 0.$$

□

(d) Sei $B \in M_{n,n}(K)$. Beh.: $B \approx A \implies I_B = I_A$ und $\chi_B^{\min} = \chi_A^{\min}$.

Beweis. Sei $B \approx A$. Dann ex. $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $B = SAS^{-1}$. Es ist

$$\begin{aligned} (SAS^{-1})^m &= \underbrace{SA\overbrace{S^{-1} \cdot S}^{=E_n}AS^{-1} \cdot \ldots \cdot SAS^{-1}}_{m\text{-mal}} \\ &= SA^m S^{-1} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} f(SAS^{-1}) &= \sum_{k=0}^{m} a_k (SAS^{-1})^k \\ &= \sum_{k=0}^{m} a_k SA^k S^{-1} \\ &= S \cdot \sum_{k=0}^{m} a_k A^K \cdot S^{-1} \\ &= Sf(A)S^{-1}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} & f \in I_A \\ \iff & f(A) = 0 \\ \overset{S \neq 0}{\iff} & S f(A) S^{-1} = 0 \\ \iff & f(SAS^{-1}) = 0 \\ \iff & f(B) = 0 \\ \iff & f \in I_B. \end{aligned}$$

Also ist $(\chi_A^{\min}) = I_A = I_B = (\chi_B^{\min})$ und, wegen $\chi_A^{\min}$ und $\chi_B^{\min}$ normiert, $\chi_A^{\min} = \chi_B^{\min}$. □

(e) Beh.: Mit $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist $\chi_A^{\min} \neq \chi_A^{\text{char}}$.

Beweis. Es ist $P_A = \begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix}$. Also $c_1(A) = c_2(A) = t-1$, also mit 19(b) $\chi_A^{\min} = t-1$, aber $\chi_A^{\text{char}} = \det(P_A) = (t-1)^2 \neq t - 1 = \chi_A^{\min}$. □

Aufgabe 19. Sei K ein Körper.

(a) Sei $g \in K[t]$ nichtkonstant und normiert mit Begleitmatrix B_g. Beh.: $\chi_{B_g}^{\min} = g$.

Beweis. Zunächst z.Z.: $\deg(\chi_{B_g}^{\min}) \geq \deg(g)$. Ang. es ex. ein $0 \neq f \in I_A$ mit $\mathbb{N} \ni m := \deg(f) < \deg(g) =: n \in \mathbb{N}$. Es gilt $\forall k \in \mathbb{N}$ mit $k < n$:

$$B_g^k e_1 = B_g^{k-1} B_g e_1 = B_g^{k-1} e_2 = \ldots = e_{k+1}.$$

Damit folgt

$$f(B_g)e_1 = a_0 e_1 + a_1 e_2 + \ldots + a_m e_{m+1} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Also $a_0 = a_1 = \ldots = a_m = 0 \implies f = 0$ ↯. Da $\chi_A^{\min} \neq 0 \implies \deg(\chi_A^{\min}) \geq \deg(g)$.
Da $\chi_A^{\text{char}} \in (\chi_A^{\min})$, ex. ein $r \in K[t]$ mit $g = \chi_A^{\text{char}} = r \cdot \chi_A^{\min}$. Da $K[t]$ nullteilerfrei, folgt also $\deg(g) = \deg(\chi_A^{\text{char}}) \geq \deg(\chi_A^{\min})$. Damit folgt $\deg(g) = \deg(\chi_A^{\min})$ und $\chi_A^{\min} \mid g$. Da g und $\chi_A^{\min}$ normiert, folgt $g = \chi_A^{\min}$. □

(b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_{n,n}(K)$ mit Invariantenteilern $c_1(A), \ldots, c_n(A)$ und $c_1(A) \mid \ldots \mid c_n(A)$. Beh.: $c_n(A) = \chi_A^{\min}$.

Beweis. Seien $g_1, \ldots, g_r$ die nichtkonstanten Invariantenteiler von A. Dann ist $g_r = c_n$ und $A \approx B_{g_1,\ldots,g_r}$. $B_{g_1,\ldots,g_r}$ ist diagonale Blockmatrix, d.h.

$$B_{g_1,\ldots,g_r}^k = \begin{pmatrix} B_{g_1}^k & 0 & \\ 0 & \ddots & \\ & & B_{g_r}^k \end{pmatrix}.$$

Damit folgt für $f \in K[t]$ beliebig.

$$\begin{aligned} & f \in I_{B_{g_1,\ldots,g_r}} \\ \iff & f(B_{g_k}) = 0 \quad \forall k = 1, \ldots, r \\ \overset{\text{(a)}}{\iff} & g_k \mid f \quad \forall k = 1, \ldots, r \\ \overset{g_1 \mid g_2 \mid \ldots \mid g_r}{\iff} & g_r \mid f \\ \iff & f = q \cdot g_r \\ \iff & f \in (g_r). \end{aligned}$$

Also folgt $(c_n) = (g_r) = I_{B_{g_1,\ldots,g_r}} \overset{18(\text{d})}{=} I_A$. Da c_n normiert, folgt also $c_n = \chi_A^{\min}$. □

Aufgabe 20. (a) Es ist $n = 8$, $\chi_A^{\text{char}} = c_6(A) \cdot c_7(A) \cdot c_8(A) = (t+1) \cdot t(t+1) \cdot t^2(t+1)^3 = t^3(t+1)^5$ und $\chi_A^{\text{min}} = c_8(A) = t^3(t+1)^5$.

(b) Es ist $d_1(A) = \ldots = d_5(A) = 1$. $d_6(A) = c_6(A) = t+1$, $d_7(A) = c_6(A) \cdot c_7(A) = t(t+1)^2$, $d_8(A) = d_7(A) \cdot c_8(A) = t^3(t+1)^5$.

$$A \approx B_{c_6,c_7,c_8} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \end{pmatrix}.$$

(c) Die Weistraßteiler sind $h_1 = t+1$, $h_2 = t$, $h_3 = t+1$, $h_4 = t^2$, $h_5 = (t+1)^3$.

$$A \approx B_{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 21. Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{Q})$ gilt:

$$P_A = \begin{pmatrix} t & -2 \\ -1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2-2 \end{pmatrix}.$$

Also sind $c_1(A) = 1$ und $c_2(A) = t^2 - 2$. Über $\mathbb{Q}$ ist $t^2 - 2$ irreduzibel, also $h_1 = t^2 - 2$. Damit folgt für die Weierstraßnormalform

$$A \approx B_{h_1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Über $\mathbb{R}$ ist $t^2 - 2$ reduzibel als $t^2 - 2 = \underbrace{(t+\sqrt{2})}_{=:\tilde{h}_1}\underbrace{(t-\sqrt{2})}_{=:\tilde{h}_2}$, also folgt

$$A \approx B_{\tilde{h}_1,\tilde{h}_2} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$