

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	Σ
Punkte					

Aufgabe 1. a) Beh.: f messbar und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Beweis. Es ist f_k messbar $\forall k \in \mathbb{N}$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$, also ist f nach VL messbar.

Zunächst gilt $\forall k \in \mathbb{N}$, da $f \geq f_k \geq g$ auch $-f_- \geq -f_{k-} \geq -g_-$, also insbesondere $f_- \leq f_{k-} \leq g_-$. Da g integrierbar folgt damit mit der Monotonie des Integrals für nicht-negative Funktionen

$$\int_X f_- \, d\mu \leq \int_X f_{k-} \, d\mu \leq \int_X g_- \, d\mu < \infty \quad (*).$$

Insbesondere ist $\int_X f \, d\mu$ und $\int_X f_k \, d\mu$ endlich oder $+\infty$.

- Falls $\int_X f \, d\mu = \infty$, dann ist bereits $\int_X f_+ \, d\mu = \infty$, denn nach (*) ist $\int_X f_- \, d\mu < \infty$. Da $f_k \nearrow f$ folgt auch $f_{k+} \nearrow f_+$. Da f_{k+} außerdem nicht-negativ und Folge messbarer Funktionen, folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_{k+} \, d\mu \stackrel{3.17}{=} \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_{k+} \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu = \infty.$$

Wegen (*) ist $f_{k-} < \infty \, \forall k \in \mathbb{N}$. Damit folgt insgesamt $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

- Falls $\exists n \in \mathbb{N}$, s.d. $\int_X f_n \, d\mu = \infty$, dann ist wegen (*) wieder $\int_X f_{n+} \, d\mu = \infty$ und wegen $f_{k+} \nearrow f_+$ und der Monotonie des Integrals für nicht-negative Funktionen gilt dies auch $\forall k \geq n$. Damit folgt ganz analog, da f_{k+} nicht-negativ und messbar:

$$\int_X f_+ \, d\mu = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_{k+} \, d\mu \stackrel{3.17}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_{k+} \, d\mu = \infty.$$

Wegen (*) ist $f_- < \infty$. Damit folgt insgesamt $\int_X f \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\mu$.

- Falls nun f und f_k integrierbar $\forall k \in \mathbb{N}$ betrachte: $h_n := f_n - g \geq 0$. Dann ist $h_n \nearrow (f - g)$. Da f_n und g integrierbar, ist auch h_n integrierbar $\forall n \in \mathbb{N}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\mu - \underbrace{\int_X g \, d\mu}_{< \infty} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_X f_k \, d\mu - \int_X g \, d\mu \right] \\ &\stackrel{f_n, g \text{ integrierbar}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X h_k \, d\mu \\ &\stackrel{3.17}{=} \int_X (f - g) \, d\mu \\ &\stackrel{f, g \text{ integrierbar}}{=} \int_X f \, d\mu - \underbrace{\int_X g \, d\mu}_{< \infty} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

□

b) Beh.:

$$\int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \, d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

Beweis. Betrachte $f := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ und $g_n := \inf\{f_k\}_{k=n}^\infty \leq f_n$. Nach Definition von $\liminf$ folgt $g_n \nearrow f$. Da $g \leq f_k \forall k \in \mathbb{N}$ insbesondere

$$g \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} \{f_k\} \leq \inf\{f_k\}_{k=n}^\infty = g_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Damit sind die Bedingungen für (a) erfüllt, also folgt

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \stackrel{(a)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

□

c) Beh.: Ohne die Voraussetzung sind die Aussagen i.A. falsch.

Beweis. Im Allgemeinen sind die Integrale nicht mal wohldefiniert, da für nicht-negative Funktionen das Integral

$$\int f \, d\mu := \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu$$

gesetzt wird. Falls also $\int f_- \, d\mu = \int f_+ \, d\mu = \infty$, ist dieser Ausdruck nicht wohldefiniert.

Unter wohlwollender Interpretation der Definition im Skript, wenn nur entweder $\int f_+ \, d\mu = \infty$ oder $\int f_- \, d\mu = \infty$, kann jedoch auch folgender Fall betrachtet werden: $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und μ Zählmaß. Dann definiere

$$f_k(n) := \begin{cases} -1 & n \geq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann folgt direkt $f_k \nearrow 0 =: f$ für $k \rightarrow \infty$. Aber es ist $\int f_k \, d\mu = -\infty \forall k \in \mathbb{N}$, also insbesondere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\mu = -\infty \neq 0 = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \, d\mu.$$

Es ist weiter $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$. Damit folgt

$$\int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \, d\mu = 0 > -\infty = \liminf_{k \rightarrow \infty} -\infty = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

□

Aufgabe 2. a) Beh.:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-x} \cos\left(\frac{x}{k}\right) \, d\lambda(x) = 1.$$

Beweis. Zunächst ist $e^{-x} \cos\left(\frac{x}{k}\right)$ stetig, insbesondere R.-integrierbar. Es kann also der HDI angewendet werden. Damit folgt mit der stetig differenzierbaren Substitution $y = \frac{x}{k}$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} \cos\left(\frac{x}{k}\right) \, d\lambda(x) &= \int_0^\infty k e^{-ky} \cos(y) \, d\lambda(y) \\ &\stackrel{\text{part. Integr.}}{=} -e^{-ky} \cos(y) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-ky} \sin(y) \, d\lambda(y) \\ &= 1 - \int_0^\infty e^{-ky} \sin(y) \, d\lambda(y) \quad (*). \end{aligned}$$

Betrachte nun $f_k(y) := e^{-ky} \sin(y)$. Falls $y = 0$: ist $f_k(0) = e^0 \sin(0) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$. Falls $y > 0$ folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(y) = \sin(y) \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-ky} = 0$. Weiter ist $|f_k(y)| = |\sin(y) e^{-ky}| \leq |e^{-ky}| \leq e^{-y}$. Außerdem e^{-y} integrierbar, denn es ist $|e^{-y}|$ uneigentlich R.-integrierbar, denn

$$\int_0^\infty e^{-y} \, d\lambda(y) = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z e^{-y} \, d\lambda(y) = \lim_{z \rightarrow \infty} [-e^{-z} + e^0] = 1 < \infty.$$

Damit ist f_k durch eine integrable Funktion beschränkt. Damit folgt mit 3.19

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-x} \cos\left(\frac{x}{k}\right) d\lambda(x) &\stackrel{(*)}{=} 1 - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-ky} \sin(y) d\lambda(y) \\ &\stackrel{3.17}{=} 1 - \int_0^\infty \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-ky} \sin(y) d\lambda(y) \\ &= 1 - \int_0^\infty 0 d\lambda(y) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

b)

c)

d) Beh.: Für $z > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_z^\infty \frac{1}{1+k^2x^2} d\lambda(x) = 0.$$

Beweis. Es ist $\frac{1}{1+k^2x^2}$ stetig, insbesondere R.-integrierbar, also folgt mit HDI, der stetig diff'baren Substitution $y = kx$ und partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int_z^\infty \frac{1}{1+k^2x^2} d\lambda(x) &= \int_{\frac{z}{k}}^\infty \frac{1}{k} \left[\frac{1}{1+y^2} \right] d\lambda(y) \\ &= \frac{1}{k} \int_{\frac{z}{k}}^\infty \frac{1}{1+y^2} d\lambda(y) \\ &= \frac{1}{k} \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} \chi_{A_k}(y) d\lambda(y). \end{aligned}$$

Mit $A_k := \{y \in [0, \infty) \mid y \geq \frac{z}{k}\}$. Es ist $A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} [0, \infty)$. Betrachte dann $f_k := \frac{1}{1+y^2} \chi_{A_k}(y) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1+y^2}$. Außerdem ist $\frac{1}{1+y^2} \geq 0 \forall y \in [0, \infty)$, also f_k monoton wachsend, also $f_k \nearrow f$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_z^\infty \frac{1}{1+k^2x^2} d\lambda(x) &\stackrel{(*)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \int_0^\infty f_k(y) d\lambda(y) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\lambda(y) \\ &\stackrel{3.17}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3. a) Beh.: $x \mapsto \partial_x f(x, y)$ ist messbar $\forall y \in Y$.

Beweis. Sei $y \in Y$. Betrachte die Folge $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) := \frac{f\left(x + \frac{1}{n}, y\right) - f(x, y)}{\frac{1}{n}} \quad \forall x \in X.$$

Dann ist, da f differenzierbar bezüglich x , $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \partial_x f(x, y)$. $\forall n \in \mathbb{N}$ ist f_n messbar, da f diff'bar insbesondere stetig bezüglich x und $\frac{1}{n} \neq 0$, also f_n als Linearkombination messbarer Funktionen messbar.

Damit ist $\partial_x f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ messbar.

□

b) Beh.: F diff'bar und

$$F'(x) = \int_Y \partial_x f(x, y) d\mu(y).$$

Beweis. Sei $x \in X$ und $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, s.d. $x + h_n \in X \forall n \in \mathbb{N}$. Betrachte dann

$$f_n(y) := \frac{f(x + h_n, y) - f(x, y)}{h_n}.$$

Damit folgt: $\forall n \in \mathbb{N}$ existiert nach MWS der Differentialrechnung ein $c \in (x, x + h_n) \subseteq X$, s.d.

$$f_n(y) = \partial_x f(c, y).$$

Damit folgt insbesondere

$$|f_n(y)| \leq \sup_{x \in X} |\partial_x f(x, y)| \leq g(y) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Damit folgt insgesamt, da $|f_n(y)| \leq g(y)$ und da f diff'bar auch $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \partial_x f$. Außerdem f_n messbar und g nach Voraussetzung integrierbar. Damit ist nach 3.19 $\partial_x f(x, y)$ integrierbar bezüglich y und es folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x + h_n, y) - F(x, y)}{h_n} &\stackrel{\text{Def.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{f(x + h_n, y) - f(x, y)}{h_n} d\mu(y) \\ &\stackrel{3.19}{=} \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu(y) \\ &= \int_X \partial_x f(x, y) d\mu(y) \end{aligned}$$

Da $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beliebig, ist also F diff'bar und es folgt

$$F'(x) = \int_X \partial_x f(x, y) d\mu(y).$$

□

Aufgabe 4. a) Beh.: Die Definition ist unabhängig von der Darstellung von f .

Beweis. Sei $f = \sum_{k=1}^K \gamma_k \chi_{C_k}$ mit $K \in \mathbb{N}$ und $C_i \cap C_j = \emptyset$ und $\gamma_i \neq \gamma_j$ für $i \neq j$. Diese Darstellung existiert, da f einfach. Sei nun weiter $f = \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{A_k}$. O.E. $\alpha_k \neq 0 \forall k = 1, \dots, N$ (diese Summanden geben keinen Beitrag zum Integral). Dann für $k \in \{1, \dots, N\}$ und $j \in \{1, \dots, K\}$ definiere

$$A_{kj} := A_k \cap C_j.$$

Dann ist $A_k = \bigcup_{j=1}^K A_{kj}$ und $C_j = \bigcup_{k=1}^N A_{kj}$, da die C_j paarweise disjunkt. Weiter gilt $\gamma_j \mu(C_j) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \mu(A_{kj})$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \alpha_k \mu(A_k) &\stackrel{\mu \text{ Maß}}{=} \sum_{k=1}^N \alpha_k \sum_{j=1}^K \mu(A_{kj}) \\ &= \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^N \alpha_k \mu(A_{kj}) \\ &= \sum_{j=1}^K \gamma_j \mu(C_j). \end{aligned}$$

Damit ist die Definition unabhängig von der Darstellung. □

b) Beh.: Für $f \in \mathcal{S}_+$ stimmen beide Definitionen des Integrals überein.

Beweis. Sei $f = \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{A_k} \in \mathcal{S}_+$. Dann ist $f \in \{g \leq f \mid g \in \mathcal{S}_+(X, \mathcal{E}, \mu)\}$. Sei nun $g \in \mathcal{S}_+(X, \mathcal{E}, \mu)$ mit $g \leq f$. Dann ist wegen der Monotonie des Integrals auf $\mathcal{S}_+$:

$$\int_X g d\mu \leq \int_X f d\mu = \sum_{k=1}^N \alpha_k \mu(A_k).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N \alpha_k \mu(A_k) &= \int_X f \, d\mu \\ &= \max \left\{ \int_X g \, d\mu \mid g \leq f, g \in \mathcal{S}_+ \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_X g \, d\mu \mid g \leq f, g \in \mathcal{S}_+ \right\}.\end{aligned}$$

□