

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	Σ
Punkte					

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit. Betrachte

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{2}(Ax, x)_2 - (b, x)_2.$$

1. Beh.: $\nabla F(x) = Ax - b$.

Beweis. Es ist

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j x_i - \sum_{i=1}^n b_i x_i$$

Da A symmetrisch, gilt $a_{ij} = a_{ji}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{1}{2} \left(2 \sum_{j=1, i \neq j}^n a_{ij} x_j + 2a_{ii} x_i \right) - b_i \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \\ &= (Ax)_i - b_i \end{aligned}$$

Also folgt

$$\nabla F(x) = Ax - b.$$

□

2. Beh.: x^* löst $Ax = b$ g.d. wenn x^* das eindeutige Minimum von F ist.

Beweis. „ $\implies$ “: Sei x^* Lösung von $Ax = b$. Dann ist $\nabla F(x^*) = Ax^* - b = b - b = 0$. Außerdem gilt da A symmetrisch

$$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^n = A^T = A.$$

Da A positiv definit, ist x^* Minimum von F . Da A symmetrisch und positiv definit, ist A regulär, also hat $\nabla F(x)$ keine weiteren Nullstellen. x^* ist also eindeutiges Minimum.

„ $\impliedby$ “: Sei x^* Minimum von F . Dann gilt $\nabla F(x^*) = 0$, also $Ax^* - b = 0$, d.h. $Ax^* = b$. □

3. Seien $x, p \in \mathbb{R}^n$ mit $p \neq 0$. Beh.: $g(\alpha) = F(x + \alpha p)$ nimmt bei

$$\alpha = \frac{(p, b - Ax)_2}{(p, Ap)_2}$$

sein Minimum an.

Beweis. Es ist

$$g'(\alpha) = (\nabla F(x + \alpha p), p)_2 = (Ax, p)_2 + \alpha(Ap, p)_2 - (b, p)_2.$$

Eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} g' \left(\frac{(p, b - Ax)_2}{(p, Ap)_2} \right) &= (Ax, p)_2 + (p, b - Ax)_2 - (b, p)_2 \\ &= (Ax - b, p)_2 + (b - Ax, p)_2 \\ &= (0, p)_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Weiter gilt da A positiv definit und $p \neq 0$:

$$g''(\alpha) = (Ap, p)_2 > 0.$$

Also ist α Minimum von g . □

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{R} \ni a \neq 0$ und

$$f(x) = x^2 - a.$$

1. (a) $g'_R(x) = 1 - \frac{2x}{a} \implies 0 = 1 - \frac{2x}{a} \implies x = \frac{a}{2}$, $g''_R(x) = -\frac{2}{a} < 0$. Also ist $x = \frac{a}{2}$ Maximum und einziges Extremum von g_R , insbes. auf $[0, a]$. Weiter ist $g\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{4} + 1$.
Wegen $g(0) = 1 = g(a)$ folgt $g([0, a]) = [1, 1 + \frac{a}{4}]$.
(b) Für $a > 0$, $\sigma = \frac{1}{a}$ und $0 < x, y < a$ gilt

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= \left| x - \frac{x^2}{a} + 1 - \left(y - \frac{y^2}{a} + 1 \right) \right| \\ &= \left| x - y + \frac{1}{a}(y^2 - x^2) \right| \\ &= \left| x - y - \frac{1}{a}(x - y)(y + x) \right| \\ &= |x - y| \left| 1 - \underbrace{\frac{1}{a}(y + x)}_{< 2a} \right| \\ &< |x - y| \cdot 1 \\ &= |x - y|. \end{aligned}$$

(c) Aus (b) folgt

$$q := \left| 1 - \frac{1}{a} \underbrace{(x^{k+1} + x^k)}_{\rightarrow 2\sqrt{a}} \right| \xrightarrow{x^k \rightarrow \sqrt{a}} 1 - \frac{2\sqrt{a}}{a}.$$

2. Sei nun

$$g_N(x) = x - \frac{x^2 - a}{2x}.$$

Sei $z \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ex. mit Taylor ein η_x zwischen x und z und ein η_y zwischen y und z , s.d.

$$\begin{aligned} g_N(x) &= g'_N(z)(x - z) + \underbrace{g''_N(\eta_x)(x - z)^2}_{\text{Restglied}} \\ g_N(y) &= g'_N(z)(y - z) + \underbrace{g''_N(\eta_y)(y - z)^2}_{\text{Restglied}} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$g_N(y) - g_N(x) = g'_N(z)(y - x) + g''_N(\eta_y)(y - z)^2 + g''_N(\eta_x)(y - z)^2.$$

Es gilt weiter

$$\begin{aligned} g'_N(x) &= 1 - \frac{4x^2 - 2x^2 + 2a}{4x^2} = 1 - \frac{x^2 + a}{2x^2} = \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2} \\ g''_N(x) &= \frac{a}{x^3}. \end{aligned}$$

Mit $z = \frac{x+y}{2}$ folgt

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= \left| \left(\frac{1}{2} - \frac{2a}{(x+y)^2} \right) (x - y) + \frac{a(x-y)^2}{4} \left(\frac{1}{\eta_x^3} + \frac{1}{\eta_y^3} \right) \right| \\ &= |x - y| \left| \frac{1}{2} - \frac{2a}{(x+y)^2} + \frac{a|x-y|}{4} \left(\frac{1}{\eta_x^3} + \frac{1}{\eta_y^3} \right) \right|. \end{aligned}$$

Z.z.: $\exists \epsilon > 0$, s.d. für $|x - \sqrt{a}|, |y - \sqrt{a}| < \epsilon$, $\left| \frac{1}{2} - \frac{2a}{(x+y)^2} + \frac{a|x-y|}{4} \left(\frac{1}{\eta_x^3} + \frac{1}{\eta_y^3} \right) \right| < 1$ gilt.

Für $x \rightarrow \sqrt{a}$ und $y \rightarrow \sqrt{a}$ folgt $\eta_x \rightarrow \sqrt{a}$ und $\eta_y \rightarrow \sqrt{a}$. Damit folgt

$$\left| \frac{1}{2} - \underbrace{\frac{2a}{(x+y)^2}}_{\rightarrow 4\sqrt{a}} + \frac{a \overbrace{|x-y|}^{\rightarrow 0}}{4} \underbrace{\left(\frac{1}{\eta_x^3} + \frac{1}{\eta_y^3} \right)}_{\rightarrow \frac{2}{\sqrt{a}^3}} \right| \rightarrow 0.$$

Also für ϵ klein genug, folgt $|g(x) - g(y)| < |x - y|$ für $|x - \sqrt{a}|, |y - \sqrt{a}| < \epsilon$.

3. Es gilt für $0 < x^k \neq \sqrt{a}$:

$$x^{k+1} = g_N(x^k) = x^k - \frac{(x^k)^2 - a}{2x^k}.$$

Es gilt damit

$$\begin{aligned} 0 &< \underbrace{(x^k)^2 - a}_{\neq 0} = (x^k)^4 - 2(x^k)^2 a + a^2 \\ \implies 4(x^k)^2 a &< (x^k)^4 + 2(x^k)^2 a + a^2 \\ \implies 2x^k \sqrt{a} &< (x^k)^2 + a = 2(x^k)^2 - (x^k)^2 + a \\ \implies \sqrt{a} &< x^k - \frac{(x^k)^2 - a}{2x^k} = x^{k+1} \quad (*). \end{aligned}$$

Für $x^k > \sqrt{a}$ gilt zudem

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \underbrace{\frac{(x^k)^2 - a}{2x^k}}_{>0} \\ &< x^k. \end{aligned}$$

Damit folgt für $x^k > \sqrt{a}$ konvergiert x^{k+1} monoton gegen $\sqrt{a}$. Falls $x^k < \sqrt{a}$, dann ist wegen (*) $x^{k+1} > \sqrt{a}$. Dann tritt wieder der erste Fall ein und es liegt ebenfalls Konvergenz vor.

Aufgabe 3. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Betrachte

$$F(x) = \|f(x)\|_2^2$$

und

$$H(\alpha) = \|f(x^k) + \alpha J_f(x^k) p^k\|_2^2.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} H'(\alpha) &= 2 [f(x^k) + \alpha J_f(x^k) p^k]^T J_f(x^k) p^k \\ &= 2 [(f(x^k), J_f(x^k) p^k)_2 + \alpha (J_f(x^k) p^k, J_f(x^k) p^k)_2] \end{aligned}$$

α_{opt} eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} H'(\alpha_{opt}) &= 2 [(f(x^k), J_f(x^k) p^k)_2 - (f(x^k), J_f(x^k) p^k)_2] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Weiter ist wegen $p^k \neq 0$

$$\begin{aligned} H''(\alpha) &= (J_f(x^k) p^k, J_f(x^k) p^k)_2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Also hat H bei α_{opt} ein Minimum.

Iterationen:

1. Relaxation:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_{opt} f(x^k).$$

2. Gradientenverfahren: Es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n 2f_i(x) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 2(f(x), (J_f(x))_{j\text{-te Spalte}})_2 \implies \nabla F = 2J_f(x)^T f(x).$$

Damit folgt

$$x^{k+1} = x^k - 2\alpha_{opt} J_f(x^k)^T f(x^k).$$

3. Newton-Verfahren:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_{opt} J_f^{-1}(x^k) f(x^k).$$

Aufgabe 4. Siehe `prog_nonlinear_solvers_methods.cc` und `prog_nonlinear_solvers_fractal.cc`.

Nullstellen mit Newtonverfahren siehe Programmcode. Gewählte Parameter für Relaxationsverfahren: Startpunkt $(2, 1)^T$, $\sigma = 0.35$. Damit konvergiert das Verfahren in 49 Iterationsschritten mit einer Abweichung von $\|f(x_i)\|_2 < 10^{-15}$.

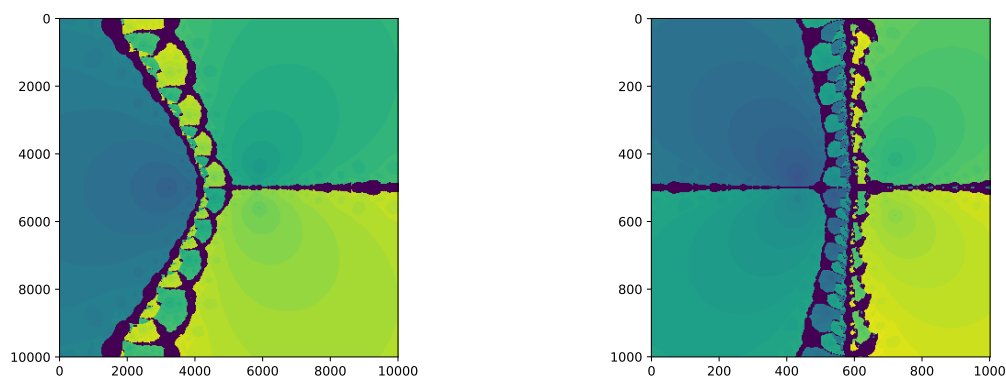


Abbildung 1: Links: Verändertes Raster, Rechts: Polynom $x^4 - 3x^3 + 5x + 3$