

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	Σ
Punkte					

Aufgabe 1. a) Es ergibt sich durch Ausrechnen:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= y_0 = \frac{1}{2} \\
 a_1 &= \frac{y_1 - a_0 N_0(t_1)}{N_1(t_1)} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \\
 a_2 &= \frac{y_2 - a_0 N_0(t_2) - a_1 N_1(t_2)}{N_2(t_2)} = -\frac{4}{45}
 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$p_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \left(t - \frac{1}{4} \right) - \frac{4}{45} \left(t - \frac{1}{4} \right) (t - 1).$$

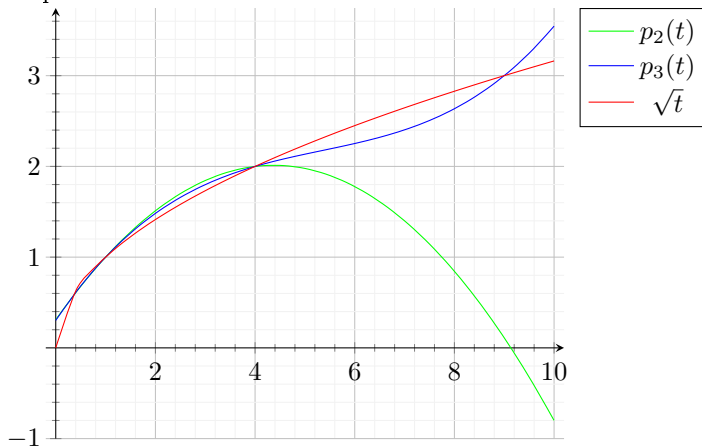
b) Es folgt für $t_3 = 9$ $y_3 = 3$, also

$$a_3 = \frac{y_3 - a_0 N_0(t_3) - a_1 N_1(t_3) - a_2 N_2(t_3)}{N_3(t_3)} = \frac{13}{1575}$$

Damit folgt

$$p_3(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \left(t - \frac{1}{4} \right) - \frac{4}{45} \left(t - \frac{1}{4} \right) (t - 1) + \frac{13}{1575} \left(t - \frac{1}{4} \right) (t - 1)(t - 4).$$

c) Graph:



Aufgabe 2. a) Bezeichne:

$$\begin{aligned}
 r_{i,0}(x) &:= y_i \\
 r_{i,k}(x) &:= \frac{(x - x_i)p_{i+1,k-1}(x) - (x - x_{i+k})p_{i,k-1}(x)}{x_{i+k} - x_i}.
 \end{aligned}$$

Z.z.: $p_{i,0}(x) = r_{i,0}(x)$ und $p_{i,k}(x) = r_{i,k}(x)$.

$r_{i,0}$ bzw. $r_{i,k}$ sind Polynome vom Grad 0 bzw. k . D.h. es genügt zu zeigen, dass sie die Interpolationseigenschaft erfüllen. Die Behauptung folgt dann aus der Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms.

Für $r_{i,0}(x)$ ist die Interpolationseigenschaft trivialerweise für die eine Stützstelle x_i erfüllt, denn $r_{i,0}(x_i) = y_i$.

Für $r_{i,k}$ gilt für $i \leq j \leq i+k$:

$$\begin{aligned}
 r_{i,k}(x_j) &= \frac{(x_j - x_i)p_{i+1,k-1}(x_j) - (x_j - x_{i+k})p_{i,k-1}(x_j)}{x_{i+k} - x_i} \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{(x_j - x_i)y_j - (x_j - x_{i+k})y_j}{x_{i+k} - x_i} \\
 &= y_j \frac{x_j - x_i - x_j + x_{i+k}}{x_{i+k} - x_i} \\
 &= y_j \frac{x_{i+k} - x_i}{x_{i+k} - x_i} \\
 &= y_j.
 \end{aligned}$$

(*): Falls $j = i$, dann ist $p_{i+1,k-1}(x_j)$ i.A. nicht y_j , aber dann ist $(x_j - x_i) = (x_i - x_i) = 0$, also gilt dennoch $(x_j - x_i)p_{i+1,k-1}(x_j) = (x_j - x_i)y_j$. Analog für $j = i+k$.

- b) Durch Berechnung von $p_{0,3}(61.7)$ mit dem Schema aus (a) erhält man die Tageslänge am Ort E mit 19h 29,55m.

Aufgabe 3. a) • Für die Koeffizienten a_i gilt $a_i = y_i$. Also keine Operationen nötig.

- Auswertung von $L_i^{(n)}(\xi) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(\xi - x_j)}{x_i - x_j}$: $n+1$ Faktoren mit 3 Operationen plus n Multiplikationen für das Produkt. Gesamt: $3(n+1) + n = 4n+4+n = 5n+4 = 5(n+1)-1$. Auswertung von $p(\xi)$: $n+1$ Summanden mit $5(n+1)-1$ Operationen plus Multiplikation mit y_i , ergibt $(n+1) \cdot (5(n+1)-1+1) = 5(n+1)^2$. Mit zusätzlich n Additionen für die Auswertung der Summe ergibt sich insgesamt $5(n+1)^2 + n = \mathcal{O}(n^2)$.

- b) • Berechnung der Koeffizienten erfordert die Lösung eines LGS mit unterer Dreiecksmatrix. Dies erfordert $\mathcal{O}^2$ Operationen.

- Auswertung von $N_i(\xi) = \prod_{j=0}^{i-1} (\xi - x_j)$ erfordert 1 Addition pro Faktor und insgesamt $i-1$ Multiplikationen für das Produkt, also insgesamt: $2i-1$. Auswertung von $p(\xi)$ erfordert entsprechend die Auswertung von $N_i(\xi)$ und die Multiplikation mit dem Koeffizienten und Summation über alle $(n+1)$ Summanden. Ergibt also insgesamt mit kleinem Gauß $(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2 = \mathcal{O}(n^2)$.

- c) • Berechnung der Koeffizienten erfordert die Lösung eines vollen LGS, also $\mathcal{O}(n^3)$ Operationen.

- Auswertung eines Summanden: $a_i t^i$ erfordert $i-1+1 = i$ Multiplikationen. Auswertung von $p(x)$ erfordert das Summieren von $n+1$ Summanden, also n zusätzliche Additionen. Insgesamt folgt also wieder mit kleinem Gauß $\frac{(n+1)(n+2)}{2} + n = \frac{n^2+3n+2}{2} + n = \frac{n^2+5n+4}{2} = \mathcal{O}(n^2)$.

- d) Auswertung von $p_{i,k}$ im Neville Schema erfordert

$$\begin{aligned}
 N(k) &= 2 + N(k-1) + 1 + 1 + 1 + N(k-1) + 1 + 1 \\
 &= 7 + 2N(k-1) \\
 &= 7 + 2 \cdot 7 + 4 \cdot N(k-2) = \dots = \sum_{j=0}^{k-1} 7 \cdot 2^j \\
 &= 7 \frac{2^k - 1}{2 - 1} \\
 &= 7(2^k - 1) \\
 &= \mathcal{O}(2^k).
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4. a) Auszug aus *polynom.cc*

```

1 // Auswertung von p_{i,k}(t) mit Neville Schema bei t=x
2 template<typename REAL>
3 REAL evaluateNeville(REAL x, std::vector<REAL> &xs, std::vector<REAL> &ys, int i,
4     int k) {
5     if(k == 0) {
6         return ys[i];
7     } else {
8

```

```

7         // neville rekursionsformel
8         return ((x - xs[i])*evaluateNeville(x, xs, ys,i+1,k-1) - (x - xs[i+k])*
evaluateNeville(x, xs, ys, i, k-1))/(xs[i+k]-xs[i]);
9     }
10 }
11
12 // Auswertung eines Interpolationspolynoms p(t) bei t=x
13 template<typename REAL>
14 REAL evaluate(REAL x, std::vector<REAL> &xs, std::vector<REAL> &ys) {
15     // nutze neville verfahren mit p(x) = p_{0,n}(x)
16     evaluateNeville(x, xs, ys, 0, xs.size()-1);
17 }

```

Auswertung des Interpolationspolynoms für vorgegebene Stützstellen

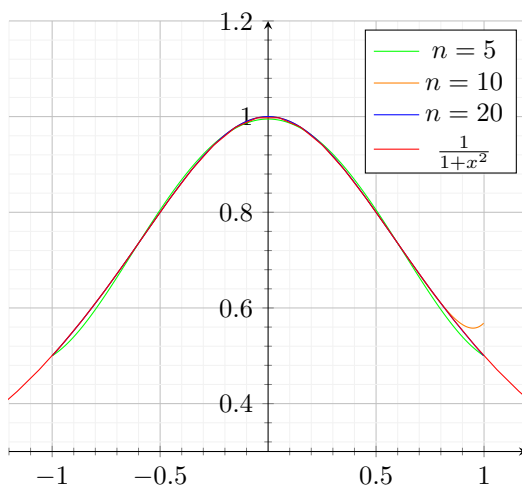
b) Auszug aus *polynom.cc*

```

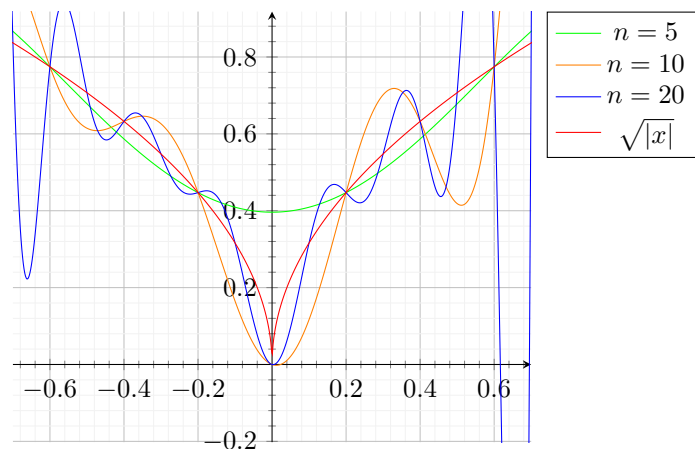
1 // Auswertung eines Interpolationspolynoms einer Funktion bei vorgegebenen
   Stuetzstellen
2 template <typename REAL>
3 REAL evaluateFunction(REAL x, std::vector<REAL> &xs, REAL(*f)(REAL)) {
4     std::vector<double> ys(xs.size());
5     for (int i = 0; i < xs.size(); i++) {
6         // berechne stuetzstellen
7         ys[i] = f(xs[i]);
8     }
9     // verwende polynominterpolation
10    return evaluate(x, xs, ys);
11 }
12
13 // Auswertung eines Interpolationspolynoms einer Funktion bei aequidistanten
   Stuetzstellen
14 template <typename REAL>
15 REAL evaluateFunctionEqualDist(REAL x, REAL a, REAL b, REAL h, REAL(*f)(REAL)) {
16     std::vector<double> xs(std::floor((b-a)/h));
17     std::vector<double> ys(xs.size());
18     for (int i = 0; i < xs.size(); i++) {
19         // berechne stuetzstellen
20         xs[i] = a + i*h;
21         // und funktionswerte
22         ys[i] = f(xs[i]);
23     }
24     // werte polynom aus
25     return evaluate(x, xs, ys);
26 }

```

Auswertung von I-Polynomen für äquidistante Stützstellen



(a) $f_1 = \frac{1}{1+x^2}$



(b) $f_2 = \sqrt{|x|}$

- c) Für $\frac{1}{1+x^2}$ funktioniert die Interpolation mit äquidistanten Stützstellen sehr gut. Für $\sqrt{|x|}$ entstehen durch die nicht differenzierbare Stelle bei $x = 0$ sehr große Abweichungen, die zu den Rändern mit wachsendem Polynomgrad sogar zunehmen.