Aufgabe 1 $A^{\wedge a} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A/a^n$, $a \subseteq A$ Ideal.

Christian Merten
Zichu Li

A1	A2	A3	A4	A5	Σ

(a) Sei $a = m$ Maximalideal. $A^{\wedge a}$ wird zum Teilring von $\prod_{n\in\mathbb{N}} A/a^n$ via komponentenw. Addition und Mult.

Beh Für $x \notin \hat{m} = \ker(A^{\wedge m} \twoheadrightarrow A/m)$ gilt $x \in (A^{\wedge m})^\times$.

Bew Sei $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \hat{m}$. Dann ist $x_1 \neq 0 \in A/m$. Da m Max.ideal folgt $x_1 \in (A/m)^\times$.

Also ex. ein $z \in A/m$ sd. $x_1 z = 1$. Da $x_{n+1} \equiv x_n \pmod m$ folgt $x_n z \equiv 1 \pmod m$ $\forall n$. Also ex. ein $r_n \in m$, sd. $x_n z = 1 - r_n \in A/m^n$. Dann gilt:

$$x_n z\,(1 + r_n + r_n^2 + \dots + r_n^{n-1}) = (1-r_n) + (1-r_n)r_n + \dots + (1-r_n)r^{n-1} \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} 1 + \underbrace{r^n}_{\in m^n}$$

$$= 1 \in A/m^n.$$

Also folgt $x_n \in (A/m^n)^\times$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Setze nun $y := (x_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$. Da Multiplikation auf $A^{\wedge m}$ komponentenweise zzz, dass $y \in A^{\wedge m}$. Sei dafür $n \in \mathbb{N}$ bel. und $\phi_n : A/m^{n+1} \xrightarrow{\text{kan.}} A/m^n$. Dann zzz, dass $\phi_n(y_{n+1}) = y_n$. Dies gilt, da $\phi_n(y_{n+1}) = \phi_n(x_{n+1}^{-1}) \overset{\phi_n \text{ Hom.}}{=} \phi_n(x_{n+1})^{-1}$

$$= x_n^{-1}$$

Also folgt $x \in (A^{\wedge m})^\times$ □

Beh $1 - \hat{m} \subseteq (A^{\wedge m})^\times$

Bew Für $x \in \hat{m}$ gilt $x_1 = 0 \in A/m$, also $1 - x_1 = 1 \neq 0 \in A/m$ da $A/m \neq 0$ da m Maxideal. Also $1 - \hat{m} \not\subseteq \hat{m}$ insbes. folgt nach Beh. 1, dass $1 - \hat{m} \in (A^{\wedge m})^\times$. □

Beh $A^{\wedge m}$ lokal. Ring mit Max.ideal $\hat{m}$.

Bew Sei $a \subsetneq A^{\wedge m}$. Dann folgt $a \cap (A^{\wedge m})^\times = \emptyset$, insbes. $a \subseteq \hat{m}$ nach Beh. 1. Da $1 \notin \hat{m}$ ist $\hat{m} \subsetneq A^{\wedge m}$ und damit $\hat{m}$ einziges Maximalideal von $A^{\wedge m}$. □

Nun sind $2\mathbb{Z}$ und $3\mathbb{Z}$ Maximalideale in $\mathbb{Z}$ und $2\mathbb{Z} \neq 3\mathbb{Z}$. Insbes. $\mathbb{Z}$ kein lokaler Ring. aber $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}^{\wedge(p)}$ für p Primzahl lokaler Ring nach Beh. 3, da $p\mathbb{Z}$ Max.ideal in $\mathbb{Z}$. Insbes. folgt $\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z}_p$.

b) $A[[T]] = A^{\mathbb{N}_0}$. Betrachte $\phi: A^{\mathbb{N}_0} \longrightarrow A[T]^{\wedge(T)}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \longmapsto (\bar{s}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wobei

$s_n = a_0 + a_1 T + \dots + a_{n-1}T^{n-1} \in A[T]$ bezeichne.

- ϕ ist A-Mod. hom.
- $\ker \phi = 0$ ist klar.
- Sei nun $(\bar{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A[T]^{\wedge(T)}$. Dann ex. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in A[[T]]$ sd.

$x_n \equiv a_0 + a_1 T + \dots + a_{n-1}T^{n-1} \pmod{T^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, denn: Vollständige Induktion.

Für $n=1$: Setze $a_0 := x_1$. Dann $x_1 \equiv a_0 \pmod{T}$.

Sei nun Beh für $n-1$ gezeigt mit Koeffizienten $a_0, \dots, a_{n-2}$. Dann ist also

$x_n \equiv x_{n-1} \pmod{T^{n-1}} \overset{IV}{\equiv} a_0 + a_1 T + \dots + a_{n-2}T^{n-2} \pmod{T^{n-1}}$

Also ex. ein $r \in A$, sd. $x_n = a_0 + a_1 T + \dots + a_{n-2}T^{n-2} + rT^{n-1}$

Mit $a_{n-1} := r$ folgt die Beh. #

Damit folgt $x_n \equiv \sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i = s_n \pmod{T^n}$ also $\phi((a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}) = (\bar{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Also ϕ surjektiv.

$\square$

A2| $(M_i)_{i\in I}$ direktes System und $(N_i)_{i\in I}$ proj. System von A-Moduln.

(a) Sei P A-Modul. Zz: $\mathrm{Hom}_A(\varinjlim_i M_i, P) \cong \varprojlim_i \mathrm{Hom}_A(M_i, P)$.

Bew: Es wird zunächst $\mathrm{Hom}_A(M_i, P)$ zum proj System via $\varphi_{ij}^H: \mathrm{Hom}_A(M_j, P) \to \mathrm{Hom}_A(M_i, P)$.
mit $h \longmapsto h \circ \varphi_{ij}^M$. Die notwendigen Kompatibilitäten folgen direkt aus denen von φ_{ij}^M.

Es gilt: Für $\psi_i: \mathrm{Hom}_A(\varinjlim_i M_i, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_i, P)$, $f \longmapsto f \circ \varphi_i^M$
wobei $\varphi_i^M: M_i \xrightarrow{\text{kan.}} \varinjlim_i M_i$ bezeichne, gilt für $i \le j$ und $f \in \mathrm{Hom}_A(\varinjlim_i M_i, P)$:

$$\varphi_{ij}^H(\psi_j(f)) = \varphi_{ij}^H(f \circ \varphi_j^M) = f \circ \varphi_j^M \circ \varphi_{ij}^M = f \circ \varphi_i^M = \psi_i(f)$$

also $\varphi_{ij}^H \circ \psi_j = \psi_i$.

Dann ex. nach univ. Eigenschaft ein $\psi: \mathrm{Hom}_A(\varinjlim_i M_i, P) \longrightarrow \varprojlim_i \mathrm{Hom}_A(M_i, P)$
mit $\psi_i = \varphi_i^H \circ \psi$.

- Sei $f \in \ker \psi \Rightarrow \psi_i(f) = \varphi_i^H(\underbrace{\psi(f)}_{=0}) = 0$ also $f \circ \varphi_i^M = 0$ $\forall i \in I$.
  Da $\forall m \in \varinjlim_i M_i$ $\exists m_i \in M_i: \varphi_i^M(m_i) = m$ folgt $f(m) = (f \circ \varphi_i^M)(m_i) = 0$.
  Also $f = 0$.
- Sei $g \in \varprojlim_i \mathrm{Hom}_A(M_i, P)$. Dann setze $h_i: M_i \longrightarrow P$, $m_i \longmapsto \varphi_i^H(g)(m_i)$.
  Dann ist h_i A-Modhom, da φ_i^H, g A-Modhoms. Außerdem gilt für $i \le j$:

$$h_i = \varphi_i^H(g) \underset{i\le j}{=} \varphi_{ij}^H(\varphi_j^H(g)) = \varphi_j^H(g) \circ \varphi_{ij}^M = h_j \circ \varphi_{ij}^M.$$

Also ex. nach univ. Eig. des direkten Limes ein $h: \varinjlim_i M_i \longrightarrow P$ A-Modhom mit
$h_i = h \circ \varphi_i^M$. Dann gilt $\forall i$: $\psi(h)_i = \varphi_i^H(\psi(h)) = \psi_i(h) = h \circ \varphi_i^M = h_i = \varphi_i^H(g)$
$= g_i$

Also $\psi(h) = g$ insbes. ψ surjektiv.

#

Beh 2. $\mathrm{Hom}_A(P, \varprojlim_i N_i) \cong \varprojlim_i \mathrm{Hom}_A(P, N_i)$

Bew. Analog zu oben wird $\mathrm{Hom}_A(P, N_i)$ zum proj. System via $\varphi_{ij}^H : \mathrm{Hom}_A(P, N_j) \to \mathrm{Hom}_A(P, N_i)$ mit $f \longmapsto \varphi_{ij}^N \circ f$.

Nun definiere $\psi_i : \mathrm{Hom}_A(P, \varprojlim_i N_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, N_i)$, $f \longmapsto \varphi_i^N \circ f$.

Man zeige nun analog zu oben: $\psi_i = \varphi_{ij}^H \circ \psi_j$.

Dann ex. ein A-Modhom $\psi : \mathrm{Hom}_A(P, \varprojlim_i N_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, N_i)$ mit $\psi_i = \varphi_i^H \circ \psi$.

- Sei $f \in \ker \psi$. Dann ist $\psi_i(f) = \varphi_i^H(\underbrace{\psi(f)}_{=0}) = 0$ also $\varphi_i^N \circ f = 0 \ \forall i$.

  Also folgt $\forall p \in P$: $f(p)_i = \varphi_i^N(f(p)) = 0 \ \forall i \Rightarrow f(p) = 0 \ \forall p \in P$ $\Rightarrow f = 0$.

- Sei nun $g \in \varprojlim \mathrm{Hom}_A(P, N_i)$. Analog zu oben konstruiere man ein $h : P \to \varprojlim_i N_i$ unter Ausnutzung der univ. Eig. d. proj Limes mit $h_i = \varphi_i^N \circ h$ wobei $h_i : P \to N_i$, $p \longmapsto \varphi_i^H(g)(p)$. Dann folgt analog $\psi(h) = g$.

$\square$

(b) <u>Behu</u> $\varinjlim_i (P \otimes_A M_i) \cong P \otimes_A (\varinjlim_i M_i)$

Bezeichne $\varphi_i : M_i \longrightarrow \varinjlim M_i$, $\varphi_{ij} : M_i \longrightarrow M_j$

und $\phi_i : P \otimes_A M_i \longrightarrow \varinjlim_i (P \otimes_A M_i)$ und $\phi_{ij} : P \otimes_A M_i \longrightarrow P \otimes_A M_j$.

mit $\phi_{ij}(p \otimes m_i) = p \otimes \varphi_{ij}(m_i)$.

<u>Bew.</u> Zz: $\varinjlim_i (P \otimes_A M_i)$ erfüllt univ. Eigenschaft des Tensorprodukts von P

und $\varinjlim_i M_i$ mit $g : P \times \varinjlim_i M_i \longrightarrow \varinjlim_i (P \otimes_A M_i)$

$(p, \varphi_i(m_i)) \longmapsto \phi_i(p \otimes m_i)$

- Es ist g wohldefiniert, denn für $\varphi_j(m_j) = \varphi_i(m_i)$ mit $i,j \in I$, $m_i \in M_i$, $m_j \in M_j$ ex. ein $k \geq i,j$ sd. $\varphi_{ik}(m_i) = \varphi_{jk}(m_j)$, d.h.

  $\phi_{ik}(p \otimes m_i) = p \otimes \varphi_{ik}(m_i) = p \otimes \varphi_{jk}(m_j) = \phi_{jk}(p \otimes m_j)$.

- Sei nun A-Modul N und $f : P \times \varinjlim_i M_i \longrightarrow N$ bilinear.

  Definiere $\hat{\psi}_i : P \times M_i \longrightarrow N$, $(p, m_i) \longmapsto f(p, \varphi_i(m_i))$.

  Dann ist $\hat{\psi}_i$ bilinear, da f bilinear und φ_i A-Modhom. Dann induziert $\hat{\psi}_i$ nach univ. Eigen. des Tensorprod. $P \otimes M_i$ ein $\psi_i : P \otimes_A M_i \longrightarrow N$ mit

  $\psi_i(p \otimes m_i) = f(p, \varphi_i(m_i))$. Dann gilt für $i \leq j$:

  $$\begin{aligned}\psi_i(p \otimes m_i) = f(p, \varphi_i(m_i)) &= f(p, \varphi_j(\varphi_{ij}(m_i))) \\ &= \psi_j(p \otimes \varphi_{ij}(m_i)) \\ &= \psi_j(\phi_{ij}(p \otimes m_i))\end{aligned}$$

  Also $\psi_i = \psi_j \circ \phi_{ij}$. Dann ex. ein eind. A-Modhom $\psi : \varinjlim (P \otimes_A M_i) \longrightarrow N$ mit $\psi_i = \psi \circ \phi_i \quad \forall i$.

  z.zz. $f = \psi \circ g$. Sei dazu $(p, m) \in P \times \varinjlim_i M_i$ und $\varphi(m_i) = m$.

  Dann ist $\psi(g(p,m)) = \psi(\phi_i(p \otimes m_i)) = \psi_i(p \otimes m_i) = f(p, \varphi_i(m_i)) = f(p,m)$.

Da das Tensorprodukt eind. bis auf kanon. Ison. ist, folgt die Beh.

$\square$

(c) Es gilt $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = 0 \quad \forall n$, denn für $q \in \mathbb{Q}$, $\bar{a} \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ gilt

$q \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{a} = \left(p \frac{q}{p}\right) \otimes \bar{a} = \frac{q}{p} \otimes \overline{pa} = \frac{q}{p} \otimes \bar{0} = 0$. Also insbes.

$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = 0$. Aber $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \neq 0$, denn $\mathbb{Q}$ flacher $\mathbb{Z}$-Modul, d.h.

die Inklusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$ induziert eine Inklusion

$$\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p.$$

Da $\mathbb{Q} \neq 0$ folgt die Beh.

$\square$

A3| $f \in A$. $A[f^{-1}] := \varinjlim \left(A \xrightarrow{\cdot f} A \xrightarrow{\cdot f} \dots \right)$ $\frac{m_1}{f^n} \cdot \frac{m_2}{f^m} = \frac{m_1 m_2}{f^{n+m}}$

(a) Behu Es ex. eine kanon. Ringstruktur auf $A[f^{-1}]$ mit $\varphi_0 : A \to A[f^{-1}]$ Ringhom.

Bew, Nach VL ist $A[f^{-1}]$ bereits abelsche Gruppe.

Für $a, b \in A[f^{-1}]$ ex. $i \in \mathbb{N}_0$ mit $a, b \in \operatorname{im} \varphi_i$. Also ex. $a_i, b_i \in A$ sd. $\varphi_i(a_i) = a$ und $\varphi_i(b_i) = b$. Dann setze $a \cdot b = \varphi_{2i}(a_i b_i)$. Wohldefiniert, denn für $j \in \mathbb{N}_0$ $a = \varphi_j(a_j)$ und $b = \varphi_j(b_j)$ mit $a_j, b_j \in A$. Dann ex. ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $i, j \leq k$.

$\varphi_{ik}(a_i) = \varphi_{jk}(a_j)$ und $\varphi_{ik}(b_i) = \varphi_{jk}(b_j)$. Dann ist $f^{k-i} a_i = f^{k-j} a_j$

Dann ist $2i, 2j \leq 2k$ und es gilt: $\varphi_{2j,2k}(a_j b_j) = f^{2k-2j} a_j b_j = f^{k-j} a_j f^{k-j} b_j = f^{k-i} a_i f^{k-i} b_i$

$= f^{2k-2i} a_i b_i$

$= \varphi_{2i,2k}(a_i b_i)$ #

Nun ist $\varphi_0 : A \to A[f^{-1}]$ Ringhom., denn für $a, b \in A$ gilt $\bar{a} = \varphi_0(a)$, $\bar{b} = \varphi_0(b)$.

$\varphi_0(a \cdot b) = \varphi_{2 \cdot 0}(a \cdot b) \overset{df}{=} \bar{a} \cdot \bar{b} = \varphi_0(a) \cdot \varphi_0(b)$.

Setze $\bar{1} := \varphi_0(1)$. Dann gilt für $\bar{a} = \varphi_i(a)$ mit $a \in A$ und $i \in \mathbb{N}_0$:

$\bar{1} = \varphi_0(1) = \varphi_i(\varphi_{0i}(1)) = \varphi_i(f^i)$. Damit folgt $\bar{1} \cdot \bar{a} \overset{df}{=} \varphi_{2i}(f^i a)$

$= \varphi_{2i}(\varphi_{i,2i}(a))$

$= \varphi_i(a)$

$= \bar{a}$

Per Def gilt nun auch $\varphi_0(1) = \bar{1}$. ☐

b) **Beh.** $A[f^{-1}] \cong A_f$ als Ringe

Bew. • Es ist nach (a) $\varphi_0 : A \longrightarrow A[f^{-1}]$ Ringhom. Es gilt für $i \in \mathbb{N}_0$:

$\varphi_0(f^i) \cdot \varphi_i(1) = \varphi_i(\varphi_{0i}(f^i)) \cdot \varphi_i(1) = \varphi_i(f^{2i}) \cdot \varphi_i(1) \overset{df}{=} \varphi_{2i}(f^{2i}) = \varphi_0(1) = \bar{1}$

Also folgt $\varphi_0(f^i) \in A[f^{-1}]^\times$ mit $\varphi_0(f^i)^{-1} = \varphi_i(1) \quad \forall i \in \mathbb{N}_0$.

Für den kan. Ringhom. $\varphi : A \longrightarrow A_f$ gilt dann, dass ein eind.

$g : A_f \longrightarrow A[f^{-1}]$ ex. mit $\varphi_0 = g \circ \varphi$.

Es gilt insb. $\bar{1} = g(1) = g\left(\frac{1}{f^i} \cdot f^i\right) = g\left(\frac{1}{f^i}\right) g(f^i) \Rightarrow g(f^i)^{-1} = g\left(\frac{1}{f^i}\right)$

Es gilt insb. $g(f^i) \cdot \varphi_i(1) = g(\varphi(f^i)) \cdot \varphi_i(1) = \varphi_0(f^i) \cdot \varphi_i(1) = \bar{1} \quad \forall i \in \mathbb{N}_0$.

Also $g(f^i)^{-1} = \varphi_i(1)^{-1} = g(f^i)$ und $\bar{1} = g(1) = g\left(\frac{1}{f^i} \cdot f^i\right) = g\left(\frac{1}{f^i}\right) g(f^i)$

Da Inverse Eindeutig sind folgt

• Sei nun $\psi_i : A \longrightarrow A_f$, $a \longmapsto \frac{a}{f^i}$ Dann gilt für $i \leq j$ und $a \in A$:

$$\psi_i(a) = \frac{a}{f^i} = \frac{f^j a}{f^{j+i}} = \frac{f^{j-i} a}{f^j} = \psi_j(f^{j-i} a) = \psi_j(\varphi_{ij}(a))$$

also $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$. Außerdem ψ_i offensichtl. A-Modhom. Dann ex.

ein eind. $\psi : A[f^{-1}] \longrightarrow A_f$ mit $\psi_i = \psi \circ \varphi_i$ und ψ A-Mod.hom.

Zz: ψ Ringhom., dazu seien $\bar{a}, \bar{b} \in A[f^{-1}]$ bel., dann ex. $i \in \mathbb{N}_0$ sd.

$\bar{a} = \varphi_i(a)$, $\bar{b} = \varphi_i(b)$ mit $a, b \in A$. Dann ist

$$\begin{aligned}\psi(\bar{a}) \cdot \psi(\bar{b}) = \psi(\varphi_i(a)) \, \psi(\varphi_i(b)) = \psi_i(a) \, \psi_i(b) &= \frac{ab}{f^{2i}} \\ &= \psi_{2i}(ab) \\ &= \psi(\varphi_{2i}(ab)) \\ &\overset{df}{=} \psi(\bar{a} \cdot \bar{b})\end{aligned}$$

Außerdem gilt $\psi(\bar{1}) = \psi(\varphi_0(1)) = \psi_0(1) = \frac{1}{f^0} = \frac{1}{1}$

- zz: $\psi \circ g = id$. Sei $\frac{a}{f^i} \in A_f$ bel. mit $i \in \mathbb{N}_0$ und $a \in A$. Dann gilt

$$\psi\left(g\left(\frac{a}{f^i}\right)\right) = \psi\left(g\left(\frac{a}{1}\right)\cdot g\left(\frac{1}{f^i}\right)\right) = \psi(g(\varphi(a))\cdot \psi(g(f^i)^{-1})$$
$$= \psi(\varphi_0(a))\cdot \psi((g(\varphi(f^i)))^{-1})$$
$$= \psi_0(a)\cdot \psi(\varphi_0(f^i)^{-1})$$
$$= a \cdot \psi(\varphi_i(1))$$
$$= a \cdot \psi_i(1)$$
$$= \frac{a}{f^i}$$

- zz: $g \circ \psi = id$. Sei $\bar{a} = \varphi_i(a) \in A[f^{-1}]$ mit $i \in \mathbb{N}_0$, $a \in A$. Dann gilt

$$g(\psi(\bar{a})) = g(\psi(\varphi_i(a))) = g(\psi_i(a)) = g\left(\frac{a}{f^i}\right) = g(a)\, g\left(\frac{1}{f^i}\right)$$
$$= g(\varphi(a))\cdot g(f^i)^{-1}$$
$$= \varphi_0(a)\cdot (g(\varphi(f^i)))^{-1}$$
$$= \varphi_0(a)\cdot \varphi_0(f^i)^{-1}$$
$$= \varphi_0(a)\ \varphi_i(1)$$
$$= \varphi_i(f^i a)\ \varphi_i(1)$$
$$\overset{df}{=} \varphi_{2i}(f^i a)$$
$$= \varphi_i(a)$$
$$= \bar{a}$$

$\square$

A4 (a) <u>Bew:</u> Sei $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ offen. Dann ist $U = \mathrm{Spec}(A) \setminus V(M)$ für ein $M \subseteq A$.

Es ist $V(M) = V\left(\bigcup_{f \in M} \{f\}\right) \overset{\text{Blatt 2}}{=} \bigcap_{f \in M} V(f)$, also

$$U = \mathrm{Spec}(A) \setminus V(M) = \mathrm{Spec}(A) \setminus \bigcap_{f \in M} V(f) = \bigcup_{f \in M} \mathrm{Spec}(A) \setminus V(f) = \bigcup_{f \in M} D(f)$$

(b) <u>Bew:</u> Seien $f, g \in A$. Dann ist $V(f) = V((f))$ und $V(g) = V((g))$, also insbes.

$$\begin{aligned} D(f) \cap D(g) &= \mathrm{Spec}(A) \setminus V(f) \cap \mathrm{Spec}(A) \setminus V(g) \\ &= \mathrm{Spec}(A) \setminus (V(f) \cup V(g)) \\ &\overset{\text{Blatt 2}}{=} \mathrm{Spec}(A) \setminus V((f)(g)) \\ &= D((f)(g)). \\ &\overset{\substack{A \text{ komm.} \\ \text{b}}}{=} D(fg) \end{aligned}$$

#

Nun gilt $D(f) = \mathrm{Spec}(A) \iff V(f) = \emptyset \overset{\text{Blatt 2}}{\iff} f \in A^\times$

jede Nichteinheit ist in einem Max.ideal (insbes. Prim-ideal) enthalten

außerdem $D(f) = \emptyset \iff V(f) = \mathrm{Spec}(A) \overset{\text{Def}}{\iff} f \in \bigcap_{\substack{p \subseteq A \\ p \text{ Prim-ideal}}} p \overset{\text{VL}}{=} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nilradikal}}}{N} \iff f$ nilpotent.

□

A5| p ungerade Pz und $a \in \mathbb{Z}$ mit $(a,p)=1$.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{Z}$ mit $x_n^2 \equiv a \pmod{p^n}$.

Beh. $\exists\, k_n \in \{0,\dots,p-1\}$ s.d. $x_{n+1} = x_n + k_n p^n$ die Gleichung

$$x_{n+1}^2 \equiv a \pmod{p^{n+1}}.$$

Bew. Es ist $x_n^2 \equiv a \mod p^n$ also $\exists r \in \mathbb{Z}: x_n^2 + rp^n = a$

Sei nun $z \in \mathbb{Z}$ bel. Dann gilt

$$\begin{aligned}(x_n + zp^n)^2 &= x_n^2 + 2zp^n + z^2p^{2n} \\ &= x_n^2 + rp^n - rp^n + 2zp^n + z^2p^{2n} \\ &= a + p^n(2z - r) + z^2p^{2n}\end{aligned}$$

Nun ist $p \nmid 2$, d.h. $\bar{2} \neq \bar{0} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, also $\bar{2} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. Setze $\bar{k}_n := \frac{\bar{r}}{\bar{2}}$ und $k_n \in \{0,\dots,p-1\}$ ein Vertreter s.d. $2k_n \equiv r \pmod p$ Dann folgt

$$(x_n + k_np^n)^2 = a + \underbrace{p^n\underbrace{(2k_n - r)}_{\equiv 0 \bmod p}}_{\equiv 0 \bmod p^{n+1}} + \underbrace{z^2p^{2n}}_{\equiv 0 \bmod p^{n+1} \text{ da } 2n \geq n+1}$$

$$\equiv a \pmod{p^{n+1}}$$

$\square$

(b) Beh. a Quadrat in $\mathbb{Z}_p \iff a$ Quadrat mod p

Bew. „$\Rightarrow$": klar, denn wenn $\exists z \in \mathbb{Z}_p: z^2 = a$ dann gilt

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \ni \bar{a} = \varphi_1(a) = \varphi_1(z^2) \underset{\uparrow}{=} \varphi_1(z)^2, \text{ also } a \text{ Quadrat mod } p.$$

φ_1 Ringhom da Einschränkung der kan. Proj. des Produktrings.

„$\Leftarrow$": Sei a Quadrat mod p. Dann ex. ein $x_1 \in \mathbb{Z}$ s.d. $x_1^2 \equiv a \pmod p$. Wende nun (a) induktiv an und erhalte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n^2 \equiv a \pmod{p^n}$ und $x_{n+1} = x_n + k_np^n$ mit $k_n \in \{0,\dots,p-1\}$. Insb. gilt $x_{n+1} \equiv x_n \pmod{p^n}$. Also folgt $y := (\bar{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}_p$ und es ist

$$y^2 = (\bar{x}_n^2)_{n\in\mathbb{N}} = (\bar{a}^2)_{n\in\mathbb{N}} = (\bar{a})^2_{n\in\mathbb{N}} = a^2$$

$\square$

$-5 = -2 = 1 = 1^2$ in $\mathbb{F}_3$ also -5 Quadrat mod 3 also $\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}_3$, also $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \subseteq \mathbb{Z}_3$.