Algebra Zettel 7

A1 (a) <u>Beh.:</u> Falls D ex. und f Monom., dann ist auch f' Monom.

<u>Bew.:</u> Seien $h_1, h_2 : T \to D$ mit $f'h_1 = f'h_2$. Dann ist $fg'h_1 = gf'h_1 = gf'h_2 = fg'h_2$ da $fg' = gf'$. Da f Mono, folgt $g'h_1 = g'h_2$. Also folgt nach univ. Eigenschaft

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "\exists! t"] \arrow[drr, bend left, "s = g'h_1 = g'h_2"] \arrow[ddr, bend right, "r = f'h_1 = f'h_2"'] & & \\
& D \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & B \arrow[d, "f"] \\
& C \arrow[r, "g"] & A
\end{tikzcd}$$

$h_1 = t = h_2$. □

(b) <u>Beh.</u> In Set ex. alle Faserprodukte.

<u>Bew.:</u> Seien $f : B \to A$, $g : C \to A$. Setze $D := \{ (b,c) \in B \times C \mid f(b) = g(c) \}$.
Dann setze $f' : D \xrightarrow{\text{kan}} C$, $g' : D \xrightarrow{\text{kan}} B$. Dann gilt für $(b,c) \in B \times C$:
$g(f'(b,c)) = g(c) = f(b) = f(g'(b,c))$.

Sei nun T Menge mit $r : T \to C$, $s : T \to B$ mit $gr = fs$.
<u>Existenz:</u> Dann setze $t : T \to D$, $t \mapsto (s(t), r(t))$ Wohldef. da $gr = fs$.
Dann ist per Konstruktion $r = f't$ und $s = g't$.
<u>Eindeutigkeit:</u> Sei $t' : T \to D$ mit $r = f't'$ und $s = g't'$. Dann ist $\forall e \in T$:
$t'(e) = (b', c')$ und $t(e) = (b,c)$ für $b, b' \in B$, $c, c' \in C$. Dann gilt
$b' = g'(t'(e)) = s(e) = g(t(e)) = b$ und analog $c = c'$. □

(c) **Beh.** In ab. Kat. ex. alle Faserprodukte.

Bew. Seien $p_1: B \oplus C \xrightarrow{\text{kan}} B$, $p_2: B \oplus C \xrightarrow{\text{kan}} C$. Dann setze $q = fp_1 - gp_2 : B \oplus C \to A$.

Dann betrachte $\ker(q) = (D \xrightarrow{m} B \oplus C)$.

Zz: $(D, f' = p_2 m, g' = p_1 m)$ ist ein Faserprodukt. Zunächst ist $qm = 0$, also

$fg' = fp_1 m = gp_2 m = gf'$. Bleibt die univ. Eig zu zeigen:

Sei $T \in \text{obj}(\mathcal{C})$ und $r: T \to C$, $s: T \to B$ mit $gr = fs$.

Existenz:

$$\begin{tikzcd}
 & & & C \arrow[dr, "g"] & \\
T \arrow[urrr, bend left, "r"] \arrow[r, dashed] \arrow[drrr, bend right, "s"'] \arrow[rr, bend right, "h"'] & D \arrow[r, "m"] & & B \oplus C \arrow[u, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] \arrow[r, "q"] & A \\
 & & & B \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Seien $i_1: B \xhookrightarrow{\text{kan}} B \oplus C$, $i_2: C \xhookrightarrow{\text{kan}} B \oplus C$. Ex. da in ab. Kat. $\underset{\text{endl.}}{\oplus} = \underset{\text{endl.}}{\prod}$.

Setze $h = i_1 s + i_2 r : T \to B \oplus C$. Dann ist

$$qh = (fp_1 - gp_2)(i_1 s + i_2 r) = f\underbrace{p_1 i_1}_{id_B} s - g\underbrace{p_2 i_1}_{=0} s + f\underbrace{p_1 i_2}_{=0} r - g\underbrace{p_2 i_2}_{id_C} r$$
$$= fs - gr$$
$$= 0$$

Also ex. nach univ. Eig des Kerns: $t: T \to D$ mit $h = mt$.

Dann ist $r = p_2 i_2 r = p_2 h = p_2 m t = f' t$ und $s = g' t$ analog.

Eindeutigkeit: Sei $t': T \to D$ mit $r = f' t'$ und $s = g' t'$. Dann ist

$$h = i_1 s + i_2 r = i_1 g' t' + i_2 f' t' = i_1 p_1 m t' + i_2 p_2 m t'$$
$$= (i_1 p_1 + i_2 p_2) m t'$$
$$\underset{\text{Bew 10.6}}{\overset{\text{VL}}{=}} id_{B \oplus C}\, m t'$$
$$= m t'$$

Nun ist also $h = mt = mt'$. Da Kerne Monom. folgt $t = t'$. $\square$

(d) **Beh.** $\mathcal{C}$ ab. Kat. Dann: f Epi $\Rightarrow$ f' Epi

Bew. Es ist $\mathcal{C}^{op}$ nach VL abelsch, d.h. in $\mathcal{C}^{op}$ ex. ein Faserprodukt und f Monom. in $\mathcal{C}^{op}$ also nach (a) f' Mono in $\mathcal{C}^{op}$ also f Epi in $\mathcal{C}$. $\square$

A2 (a) **Beh.** $B \otimes_A - \dashv f^\#$

Bew. Sei M A-Modul, N B-Modul. Dann ist $\mathrm{Hom}_A(M, f^\# N) \cong \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N)$ nach VL (3.14 (i)) mit

$$\psi_{M,N}: \mathrm{Hom}_A(M, f^\# N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N) \quad \text{mit} \quad \psi(g)(b \otimes m) = b\, g(m).$$

Nun sei $h: (M, N) \longrightarrow (M', N')$, $(m, n) \longmapsto (h_M(m), h_N(n))$ mit

h_m A-Modhom., h_N B-Modhom.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(M', f^\# N) \arrow[r, "\psi_{M',N}"] \arrow[d, "\overline{(h_M, h_N)}"'] & \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M', N) \arrow[d, "\overline{(id_B \otimes_A h_M, h_N)}"] \\
\mathrm{Hom}_A(M, f^\# N') \arrow[r, "\psi_{M,N'}"] & \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N')
\end{tikzcd}$$

wobei $(g: M' \to f^\# N) \xmapsto{\overline{(s_M, s_N)}} s_N \circ g \circ s_M$

Zz. das Diagramm kommutiert. Sei $g: M' \longrightarrow f^\# N$ und $b \otimes m \in B \otimes_A M$ bel.

ist $\overline{(id_B \otimes_A h_m, h_N)}(\psi_{M',N}(g))(b \otimes m) = [h_N \circ \psi_{M',N}(g) \circ (id_B \otimes_A h_m)](b \otimes m)$

$$= [h_N \circ \psi_{M',N}(g)](b \otimes h_M(m))$$
$$= h_N(b\, g(h_m(m)))$$
$$= b\, h_N(g(h_m(m)))$$

$$[\psi_{M,N'}(\overline{(h_m, h_n)}(g))](b \otimes m) = [\psi_{M,N'}(h_N \circ g \circ h_M)](b \otimes m)$$
$$= b\,(h_N \circ g \circ h_M)(m)$$
$$= b\, h_N(g(h_M(m)))$$

Also liegt eine natürl. Trafo und da $\psi_{M,N}$ Gruppeniso eine natürl. Äquivalenz vor. $\square$

Beh. $f^\# \dashv \mathrm{Hom}_A(B, -)$.

Bew. Seien M A-Modul und N B-Modul. Dann ist

Betrachte: $\psi: \mathrm{Hom}_B(N, \mathrm{Hom}_A(B, M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(f^\# N, M)$

$$h \longmapsto (n \longmapsto h(n)(1))$$

$$\varphi: \mathrm{Hom}_A(f^\# N, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(N, \mathrm{Hom}_A(B, M))$$
$$g \longmapsto (n \longmapsto (1 \longmapsto g(n)))$$

Dann sind ψ, φ wohldef. Hom's ab. Gruppen und für $g \in \mathrm{Hom}_A(f^\# N, M)$ und $n \in N$:

$$\begin{aligned}
[\psi(\varphi(g))](n) &= [\psi(n' \longmapsto (1 \longmapsto g(n')))](n) \\
&= [n'' \longmapsto (n' \longmapsto (1 \longmapsto g(n')))(n'')(1)](n) \\
&= [n'' \longmapsto (1 \longmapsto g(n''))(1)](n) \\
&= [n'' \longmapsto g(n'')](n) \\
&= g(n)
\end{aligned}$$

Sei nun $h \in \mathrm{Hom}_B(N, \mathrm{Hom}_A(B, M))$ und $n \in N$ bel. Dann gilt

$$\begin{aligned}
[\varphi(\psi(h))](n) &= [\varphi(n' \longmapsto h(n')(1))](n) \\
&= [n'' \longmapsto (1 \longmapsto h(n'')(1))](n) \\
&= (1 \longmapsto h(n)(1)) \\
&= h(n)
\end{aligned}$$

Also folgt $\mathrm{Hom}_B(N, \mathrm{Hom}_A(B, M)) \cong \mathrm{Hom}_A(f^\# N, M)$.

Analog zu oben sieht man, dass eine natürl. Äquivalenz vorliegt.

$\square$

b) <u>Bew.</u> Da $f^\# \dashv \mathrm{Hom}_A(B, -)$ und $B \otimes_A - \dashv f^\#$ folgt $f^\#$ rechts und linksexakt, also exakt.

Damit folgt nun aus $f^\# \dashv \mathrm{Hom}_A(B, -)$, dass $\mathrm{Hom}_A(B, -)$ Injektive in Injektive überführt und aus $B \otimes_A - \dashv f^\#$, dass $B \otimes_A -$ Proj. in Proj. überführt

$\square$

A31 (a) Sei $0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$ kurze exakte Folge und ex. zwei von $\chi(A^\bullet), \chi(B^\bullet), \chi(C^\bullet)$.

<u>Beh.</u> Es ex. die dritte und es gilt $\chi(B^\bullet) = \chi(A^\bullet) + \chi(C^\bullet)$.

<u>Bew.</u> Nach verallg. Schlangenlemma ist

$$\cdots \to H^i(A^\bullet) \xrightarrow{h_i^A} H^i(B^\bullet) \xrightarrow{h_i^B} H^i(C^\bullet) \xrightarrow{h_i^C} H^{i+1}(A^\bullet) \xrightarrow{h_{i+1}^A}$$

exakt.

Erhalte kurze exakte Folgen:

$$0 \to \ker h_i^A \hookrightarrow H^i(A^\bullet) \twoheadrightarrow \ker h_i^B \to 0$$
$$0 \to \ker h_i^B \hookrightarrow H^i(B^\bullet) \twoheadrightarrow \ker h_i^C \to 0$$
$$0 \to \ker h_i^C \hookrightarrow H^i(C^\bullet) \twoheadrightarrow \ker h_{i+1}^A \to 0$$

Also gilt
$$\dim_k H^i(A^\bullet) = \dim_k(\ker h_i^A) + \dim_k(\ker h_i^B) \qquad (1)$$
$$\dim_k H^i(B^\bullet) = \dim_k(\ker h_i^B) + \dim_k(\ker h_i^C) \qquad (2)$$
$$\dim_k H^i(C^\bullet) = \dim_k(\ker h_i^C) + \dim_k(\ker h_{i+1}^A) \qquad (3)$$

da kurze exakte Folgen von e.d. VR. Wenn nun zwei Zeilen für fast alle $i \in \mathbb{Z}$ null sind, ist die dritte auch f.f.a. $i \in \mathbb{Z}$ null und es folgt

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_k H^i(B^\bullet) \overset{(2)}{=} \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_k(\ker h_i^B) + \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_k(\ker h_i^C)$$

$$\underset{(3)}{\overset{(1)}{=}} \chi(A^\bullet) + \chi(C^\bullet) - \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_k(\ker h_i^A) - \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_k(\ker h_{i+1}^A)$$

$$= \chi(A^\bullet) + \chi(C^\bullet) - \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_k(\ker h_i^A) + \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^{i+1} \dim_k(\ker h_{i+1}^A)$$

$$= \chi(A^\bullet) + \chi(C^\bullet) \underbrace{- \underbrace{\sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_k(\ker h_i^A)}_{<\infty} + \underbrace{\sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^{i+1} \dim_k(\ker h_i^A)}_{<\infty}}_{=0}$$

$$= \chi(A^\bullet) + \chi(C^\bullet)$$ □

(b) Sei nun $A^i = 0$ f.f. alle $i \in \mathbb{Z}$. <u>Beh.</u> Dann ex. $\chi(A^\bullet)$ mit

$$\chi(A^\bullet) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_k(A^i)$$

<u>Bew.</u> $A^{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} A^i \xrightarrow{d_i} A^{i+1}$

Dann sind
$$0 \to \ker d_i \hookrightarrow A_i \xrightarrow{d_i} \operatorname{im} d_i \to 0 \quad \text{exakt}$$
$$0 \to \operatorname{im} d_{i-1} \hookrightarrow \ker d_i \twoheadrightarrow H^i(A^\bullet) \to 0$$

kurze exakte Folgen von e.d. VR, also zerfallen diese und es folgt

$$\dim_k A_i = \dim_k(\ker d_i) + \dim_k(\operatorname{im} d_i)$$

$$\dim_K H^i(A^\bullet) = \dim_K(\ker d_i) - \dim_K(\operatorname{im} d_{i-1})$$

Also insgesamt da fast alle $A^i = 0$ auch f.a. $H^i(A^\bullet), \dots = 0$ folgt:

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_K(H^i(A^\bullet)) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_K(\ker d_i) - \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_K(\operatorname{im} d_{i-1})$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_K(\ker d_i) + \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^{i-1} \dim_K(\operatorname{im} d_{i-1})$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_K(\ker d_i) + \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_K(\operatorname{im} d_i)$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_K(A^i)$$

$\square$

A4 (a) <u>Bew.</u> Sei $A \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Zz: $\underline{A}$ Funktor. Für $f: U \to V$ setze

$$\underline{A}(f): \mathcal{C}(V, A) \longrightarrow \mathcal{C}(U, A), \quad h \longmapsto h|_U \qquad \text{da } U \subseteq V.$$

Dann gilt für $\underline{A}(1_U)(h) = h|_U = h = \mathrm{id}_{\underline{A}(U)}$ für $h \in \mathcal{C}(U, A)$ bel.

Außerdem ist für $f: U \to V$, $g: V \to W$ und $h \in \mathcal{C}(W, A)$.

$$\underline{A}(gf)(h) = h|_U = (h|_V)|_U = [\underline{A}(f)\,\underline{A}(g)](h)$$

$\square$

(b) <u>Beh.</u> Für $\varphi: F \to G$ Morph. von Prägarben ist

$$\ker\varphi: \mathrm{Offen}(X)^{op} \longrightarrow \mathrm{Ab}, \quad U \longmapsto \ker(\varphi(U): F(U) \to G(U))$$

Prägarbe ab. Gruppen und $\ker\varphi \longrightarrow F$ ist ein Kern.

<u>Bew.</u> Zz: $\ker\varphi$ ist Funktor. Zunächst ist $\ker\varphi$ wohldef. und für $f: U \to V$

setze
$$(\ker\varphi)(f): \ker\varphi(V) \longrightarrow \ker\varphi(U)$$
$$g \longmapsto F(f)(g)$$

Das Diagramm
$$\begin{tikzcd}
\ker\varphi(U) \arrow[r, hook] & F(U) \arrow[r, "\varphi_U"] & G(U) \\
\ker\varphi(V) \arrow[r, hook] \arrow[u, dashed, "(\ker\varphi)(f)"] & F(V) \arrow[r, "\varphi_V"'] \arrow[u, "F(f)"'] & G(V) \arrow[u, "G(f)"']
\end{tikzcd}$$
kommutiert,

da φ natürl. Trafo. Damit ist $(\ker\varphi)(f)$ wohldef., da für $g \in \ker\varphi(V)$:

$\varphi(U)(F(f)(g)) = G(f)(\underbrace{\varphi(V)(g)}_{=0}) = 0$ also $F(f)(g) \in \ker \varphi(V)$.

Nun gilt für $f: U \to V$, $g: V \to W$ und $a \in (\ker\varphi)(W)$

$(\ker\varphi)(gf)(a) = F(gf)(a) = [F(f)F(g)](a) = [(\ker\varphi)(f) \circ (\ker\varphi)(g)](a)$

und $[(\ker\varphi)(id_W)](a) = F(id_W)(a) = id_{F(W)}(a) = a$.

Zz: $\ker\varphi \xrightarrow{i} F$ ist Kern. Dazu stelle man zunächst fest, dass $0: \text{Offen}(X)^{op} \to \text{Ab}$ mit $U \mapsto 0$ eine Prägarbe ab. Gruppen ist. Da für jede ab. Gruppe G genau ein $G \to 0$ Hom und ein $0 \to G$ Hom existiert, ex. genau eine natürl. Trafo $F \to 0$ und genau eine von $0 \to F$ für F Prägarbe abel. Gruppen. Also ist 0 ein Nullobjekt in $PSh_{Ab}(X)$.

Es ist $(\ker\varphi(U) \to F(U) \xrightarrow{\varphi(U)} G(U)) = (0: \ker\varphi(U) \to G(U))$ und das nebenstehende Diagramm kommutiert, d.h. $\varphi i = 0$.

Sei nun $\psi: E \to F$ mit $\varphi\psi = 0$. Dann betrachte für $U \in \text{obj}(\text{Offen}(X))$:

$$\begin{tikzcd}
\ker\varphi(U) \arrow[r, hook, "i_U"] \arrow[rr, bend left, "0"] & F(U) \arrow[r, "\varphi_U"] & G(U) \\
\ker\varphi(V) \arrow[r, hook, "i_V"] \arrow[u, "(\ker\varphi)(f)"] & F(V) \arrow[r, "\varphi_V"'] \arrow[u, "F(f)"] & G(V) \arrow[u, "G(f)"']
\end{tikzcd}$$

$\varphi(U) \circ \psi(U) = 0$. Nach univ. Eig. des Kerns in Ab für $\varphi(U): F(U) \to G(U)$ ex. ein eind. $\tau(U): E(U) \to \ker\varphi(U)$ sd. $\psi(U) = i(U) \circ \tau(U)$.

$$\begin{tikzcd}
\ker\varphi(U) \arrow[r, hook, "i(U)"] & F(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] & G(U) \\
E(U) \arrow[u, dashed, "\tau(U)"] \arrow[ru, "\psi(U)"']
\end{tikzcd}$$

Dies liefert eine natürl. Trafo $\tau: E \to \ker\varphi$ mit $\psi = i\tau$.

$$\begin{tikzcd}
E(U) \arrow[r, "\tau(U)"] & (\ker\varphi)(U) \\
E(V) \arrow[r, "\tau(V)"] \arrow[u, "E(f)"] & (\ker\varphi)(V) \arrow[u, "(\ker\varphi)(f)"']
\end{tikzcd}$$

Zz: τ ist eindeutig. Sei $\tau': E \to \ker \varphi$ mit $\psi = i\tau'$, dann liefert das

ein $\psi(U) = i(U)\tau'(U)$. Da aber $i(U)$ ein Kern von $\varphi(U)$, folgt $\tau(U) = \tau'(U)$ also

$\tau = \tau'$.

$\square$

(c) Beh. $PSh_{Ab}(X)$ ist additive Kat.

Bew. - Existenz eines Nullobj. bereits in (b) gezeigt

- Zz. Es ex endl. Produkte

Seien $F, G \in obj(PSh_{Ab}(X))$. Dann setze

$E: \mathrm{Offen}(X)^{op} \longrightarrow Ab$, $U \longmapsto F(U) \oplus G(U)$. Für $f: U \to V$ setze

$E(f): F(V) \oplus G(V) \longrightarrow F(U) \oplus G(U)$ ist gegeben als $p_1^{Ab} E(f) = F(f) p_1^{Ab}$ und

$p_2^{Ab} E(f) = G(f) p_2^{Ab}$ Dann ist E Prägarbe ab. Grp, da $F, G \in obj(PSh_{Ab}(X))$.

Setze nun:

$p_1, p_2: E \longrightarrow F$ mit $p_1(U) = p_1^{Ab}$, $p_2(U) = p_2^{Ab}$. Dann kommutiert

$$\begin{tikzcd} F(U) \oplus G(U) \arrow[r, "p_1(U) = p_1^{Ab}"] & F(U) \\ F(V) \oplus G(V) \arrow[u, "E(f)"] \arrow[r, "p_1(U) = p_1^{Ab}"] & F(V) \arrow[u, "F(f)"'] \end{tikzcd}$$

aufgrund der Definitionen, analog für G und p_2. Nun b.zz., dass E die univ. Eig. erfüllt.

Sei $B \in obj(PSh_{Ab}(X))$ und $f: B \to F$, $g: B \to G$. Sei $U \subseteq X$ offen.

Dann ex. nach univ. Eig des Produkts in Ab $\varphi(U): B(U) \to F(U) \oplus G(U) = E(U)$

sd. $f(U) = p_1^{Ab} \varphi(U)$ und $g(U) = p_2^{Ab} \varphi(U)$. Dies liefert eine natürl. Trafo

$\varphi: B \to E$ sd.

$$\begin{tikzcd} B(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] & E(U) \\ B(V) \arrow[u, "B(h)"] \arrow[r, "\varphi(U)"'] & E(V) \arrow[u, "E(h)"'] \end{tikzcd}$$

für $h: U \to V$ kommutiert

und mit $f = p_1 \varphi$ und $g = p_2 \varphi$. Umgekehrt liefert eine natürl Trafo $B \to E$

ein Hom. von Gruppen $B(U) \to E(U)$. Da dieser eindeutig ist, folgt die

Eindeutigkeit von φ.

- Zz: Für $F, G \in obj(PSh_{Ab}(X))$ ist $Mor_{PSh_{Ab}(X)}(F, G)$ ab. Gruppe.

Für $f, g: F \longrightarrow G$ setze $(f+g)(U) := f(U) +_{Ab} g(U)$.

Dies induziert wieder eine natürl. Trafo und erfüllt die Bilinearitätsforderung.

$\square$

Beh.: $PSh_{Ab}(X)$ ist abelsche Kat.

Bew.: - Jeder Hom hat Kern und Kokern folgt aus (b)

- Zz: Jeder Mono ist Kern seines Kokerns. Sei $f: F \longrightarrow G$ Monom. und $U \subseteq X$ offen

$$F(U) \xrightarrow{f(U)} G(U) \xrightarrow{p(U)} \mathrm{coker}(f)(U)$$

Dann ist $f(U): F(U) \longrightarrow G(U)$ ebenfalls Mono und da Ab abelsche Kat. gilt $f(U)$ ist Kern von $p(U)$. Wegen (b) ist damit f Kern von p.

- Zz: Jeder Epi ist Kokern seines Kerns: analog.

- Zz: Jeder Morphismus f kann als $f = i\varepsilon$ mit i Mono und ε Epi geschrieben werden. Das folgt aus der Zerlegung von $f(U)$ in Ab.

$\square$

A5 (a) Beh.: $Fun(C, D)$ Kategorie

Bew.: - Daten sind klar, Verkettung von nat. Trafo's passiert auf Morphismenebene. Für $F, G: C \longrightarrow D$ Funktoren ist $Mor_{Fun(C,D)}(F, G)$ Menge da C klein.

- (A1): per Konstruktion

- (A2): Assoz. der Verknüpfung von nat. Trafos folgt aus Assoz. der Verknüpfung der Morphismen auf C.

- (A3): Sei $F: C \longrightarrow D$ Funktor und $A \in obj(C)$. Dann definiert

$1_F(A) := 1_{FA}$ eine nat. Trafo $t: F \longrightarrow F$ mit den gew. Eigenschaften.

(b) Beh.: $F: C \longrightarrow Fun(C^{op}, Set)$, $c \longmapsto Mor_C(-, c)$ ist volltreu

Bew.: Seien $A, A' \in obj(C)$. Zz: $Mor_C(A, A') \longrightarrow Mor_{Fun(C^{op}, Set)}(F(A), F(A'))$ bij.

Wende Yoneda auf C^{op} an. Das liefert eine Bijektion

$$Mor_{C^{op}}(A', A) \cong \{\text{nat. Trafo } t: Mor_{C^{op}}(A, -) \longrightarrow Mor_{C^{op}}(A', -)\}$$

Dies liefert nach Def von C^{op}:

$$Mor_C(A, A') \cong \{\text{nat. Trafo } t: Mor_C(-, A) \longrightarrow Mor_C(-, A')\}$$
$$= Mor_{Fun(C^{op}, Set)}(Mor_C(-, A), Mor_C(-, A'))$$

$\square$