

Auflösung unbeschränkter Komplexe

Christian Merten

28. März 2022

1 Einleitung

2 Derivierte Kategorien und abgeleitete Funktoren

3 K-injektive und K-projektive Auflösungen

Sei im Folgenden $\mathcal{A}$ eine feste abelsche Kategorie und $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{A})$ die Komplexkategorie mit Komplexhomomorphismen bis auf Homotopie als Abbildungen.

Definition 3.1 (K-injektiv bzw. K-projektiv). Ein Komplex $X^\bullet \in \mathcal{K}$ heißt K-injektiv (bzw. K-projektiv), wenn für alle $S^\bullet \in \mathcal{K}$, der Komplex $\text{Hom}^\bullet(S^\bullet, X^\bullet)$ (bzw. $\text{Hom}^\bullet(X^\bullet, S^\bullet)$) exakt ist.

Bemerkung 3.2. Mit ?? ist $X^\bullet$ genau dann K-injektiv (bzw. K-projektiv), wenn $\forall S^\bullet \in \mathcal{K}$ exakt: $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(S^\bullet[i], X^\bullet) = 0$ (bzw. $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet, S^\bullet[i]) = 0$) $\forall i \in \mathbb{Z}$. Da Verschieben Exaktheit erhält folgt also

$$X^\bullet \text{ K-projektiv} \iff \text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet, S^\bullet) = 0 \quad \forall S^\bullet \text{ exakt}$$

$$X^\bullet \text{ K-injektiv} \iff \text{Mor}_{\mathcal{K}}(S^\bullet, X^\bullet) = 0 \quad \forall S^\bullet \text{ exakt.}$$

3.1 Elementare Eigenschaften von K-injektiven und K-projektiven Komplexen

Bemerkung 3.3. Ein exakter K-projektiver oder K-injektiver Komplex $X^\bullet$ ist zusammenziehbar, d.h. ist nullhomotop.

Beweis. Betrachte $\text{id}_{X^\bullet} \in \text{Hom}^0(X^\bullet, X^\bullet) = \text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet, X^\bullet) = H^0 \text{Hom}^\bullet(X^\bullet, X^\bullet) = 0$. Also ist $\text{id}_{X^\bullet} = 0$ und damit $X^\bullet = 0$ in $\mathcal{K}$. $\square$

Satz 3.4. Sei $X^\bullet \in \mathcal{K}$ mit $X^i = 0 \forall i \neq 0$. Dann ist $X^\bullet$ K-injektiv (bzw. K-projektiv) genau dann wenn X^0 injektiv (bzw. projektiv) in $\mathcal{A}$ ist.

Beweis. „ $\implies$ “: Sei $X^\bullet$ K-projektiv und $S^\bullet = 0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ kurze exakte Folge in $\mathcal{A}$. Sei $f: X^0 \rightarrow P$. Das induziert einen Komplexhomomorphismus $X^\bullet \rightarrow S^\bullet$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow k & \downarrow f & \nwarrow & \downarrow \\ M & \longrightarrow & N & \xrightarrow{v} & P & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Nach Voraussetzung ist dieser nullhomotop, d.h. es existiert $k: X^0 \rightarrow N$, s.d. $f = vk$. Also ist $\text{Hom}(X^0, N) \rightarrow \text{Hom}(X^0, P)$ surjektiv und damit X^0 projektiv.

„ $\impliedby$ “: Sei nun X^0 projektiv, $S^\bullet \in \mathcal{K}$ exakt und $f: X^\bullet \rightarrow S^\bullet$ Komplexhomomorphismus. Dann betrachte

diag.

Da X^0 projektiv, existiert $k^0: X^0 \rightarrow S^{-1}$, s.d. $f^0 = d^{-1}k^0$. $\square$

Satz 3.5. (i) $X^\bullet \in \mathcal{K}$ ist K-projektiv (bzw. K-injektiv) genau dann wenn $X^\bullet[1]$ dies ist.

(ii) Falls zwei Punkte eines ausgezeichneten Dreiecks in $\mathcal{K}$ K-projektiv (bzw. K-injektiv) sind, dann auch der dritte.

Beweis. (i) Das folgt, daraus dass für $X^\bullet, S^\bullet \in \mathcal{K}$ gilt: $S^\bullet$ exakt $\iff S^\bullet[-1]$ exakt und

$$\text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet, S^\bullet[-1]) = \text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet[1], S^\bullet).$$

- (ii) Sei $(X^\bullet, Y^\bullet, Z^\bullet, u, v, w)$ ein ausgezeichnetes Dreieck mit $X^\bullet, Y^\bullet$ K -projektive und $S^\bullet$ exakt. Nach Anwenden von $\text{Mor}_K(-, S^\bullet)$?? ist dann

$$\underbrace{\text{Mor}_K(X^\bullet[1], S^\bullet)}_{=0} \rightarrow \text{Mor}_K(Z^\bullet, S^\bullet) \rightarrow \underbrace{\text{Mor}_K(Y^\bullet, S^\bullet)}_{=0}$$

exakt und die äußeren Terme 0 nach Voraussetzung und (i). Also folgt $\text{Mor}_K(Z^\bullet, S^\bullet) = 0$, also $Z^\bullet$ K -projektive. Der allgemeine Fall folgt nun mit ??.

□

Satz 3.6. Sei $P^\bullet \in \mathcal{K}$. Dann sind äquivalent

- (i) $P^\bullet$ K -projektive
(ii) Für $X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ Quasiisomorphismus in $\mathcal{K}$ ist der natürliche Homomorphismus

$$\text{Mor}_K(P^\bullet, X^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_K(P^\bullet, Y^\bullet)$$

ein Isomorphismus.

- (iii) Für $S^\bullet \in \mathcal{K}$ ist der natürliche Homomorphismus

$$\text{Mor}_K(P^\bullet, S^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_D(P^\bullet, S^\bullet)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Sei $f: X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ ein Quasiisomorphismus. Dann ist

$$X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \longrightarrow C_f^\bullet \longrightarrow X^\bullet[1]$$

ein ausgezeichnetes Dreieck und $C_f^\bullet$ ist nach ?? exakt. Anwenden von $\text{Mor}_K(P^\bullet, -)$ liefert mit ?? eine exakte Folge:

$$\underbrace{\text{Mor}_K(P^\bullet, C_f^\bullet[-1])}_{=0} \longrightarrow \text{Mor}_K(P^\bullet, X^\bullet) \longrightarrow \text{Mor}_K(P^\bullet, Y^\bullet) \longrightarrow \underbrace{\text{Mor}_K(P^\bullet, C_f^\bullet)}_{=0}.$$

Die äußeren Terme sind 0, da $P^\bullet$ K -projektive, also folgt der behauptete Isomorphismus.

(ii) $\implies$ (iii): Injektivität: Sei $f: P^\bullet \rightarrow S^\bullet$, s.d. $\text{id}^{-1}f = 0$. Nach ?? existiert ein $t: S^\bullet \rightarrow T^\bullet$ Quasiisomorphismus, s.d. $tf = 0$. Nach (ii) ist $t_*: \text{Mor}_K(P^\bullet, S^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_K(P^\bullet, T^\bullet)$ injektiv, also folgt $f = 0$. Surjektivität: Sei $a \in \text{Mor}_D(P^\bullet, S^\bullet)$. Dann ist a ein Diagramm in $\mathcal{K}$

$$\begin{array}{ccc} & M^\bullet & \\ f \nearrow & & \nwarrow s \\ P^\bullet & & S^\bullet \end{array}$$

mit s Quasiisomorphismus. Nach (ii) ist $s_*: \text{Mor}_K(P^\bullet, S^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_K(P^\bullet, M^\bullet)$ surjektiv, also existiert ein $g: P^\bullet \rightarrow S^\bullet$, s.d. $sg = f$. Also kommutiert

$$\begin{array}{ccccc} & & S^\bullet & & \\ & g \nearrow & \downarrow s & \nwarrow \text{id} & \\ P^\bullet & & M^\bullet & \xleftarrow{s} & S^\bullet \\ & f \searrow & \uparrow \text{id} & \swarrow s & \\ & & M^\bullet & & \end{array}.$$

Damit folgt $a = g\text{id}^{-1}$.

(iii) $\implies$ (i): Sei $S^\bullet$ exakt. Dann ist $S^\bullet \rightarrow 0$ ein Quasiisomorphismus, also $S^\bullet \cong 0$ in $\mathcal{D}$, also

$$\text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet, S^\bullet) \stackrel{(ii)}{=} \text{Mor}_{\mathcal{D}}(X^\bullet, S^\bullet) = \text{Mor}_{\mathcal{D}}(X^\bullet, 0^\bullet) = 0.$$

□

Satz 3.7. Sei $P^\bullet \in \mathcal{K}$. Dann sind äquivalent

- (i) $P^\bullet$ K -projektiv.
- (ii) Für alle Diagramme in $\mathcal{K}$

$$\begin{array}{ccc} & & M^\bullet \\ & & \downarrow s \\ P^\bullet & \xrightarrow{f} & N^\bullet \end{array}$$

mit s Quasiisomorphismus, existiert genau ein $g: P^\bullet \rightarrow M^\bullet$, s.d. $sg = f$ in $\mathcal{K}$.

- (iii) Für alle Quasiisomorphismen $u: S^\bullet \rightarrow P^\bullet$ in $\mathcal{K}$ existiert ein $v: P^\bullet \rightarrow S^\bullet$, s.d. $uv = \text{id}_{P^\bullet}$ in $\mathcal{K}$.

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Betrachte das gegebene Diagramm in $\mathcal{D}$:

$$\begin{array}{ccc} & & X^\bullet \\ & \nearrow g & \downarrow \text{id}^{-1}s \\ P^\bullet & \xrightarrow{\text{id}^{-1}f} & Y^\bullet \end{array}$$

Da s Quasiisomorphismus, ist s Isomorphismus in $\mathcal{D}$, also existiert ein $g: P^\bullet \rightarrow X^\bullet$ in $\mathcal{D}$, sodass das Diagramm kommutiert. 3.6 (iii) liefert das gewünschte Diagramm in $\mathcal{K}$.

(ii) $\implies$ (iii): Betrachte

$$\begin{array}{ccc} & & S^\bullet \\ & & \downarrow s \\ P^\bullet & \xrightarrow{\text{id}} & P^\bullet \end{array}$$

Da s Quasiisomorphismus existiert mit (ii) ein $f: P^\bullet \rightarrow S^\bullet$, s.d. $sf = \text{id}_{P^\bullet}$.

(iii) $\implies$ (ii): Erneut mit ?? genügt es zu zeigen, dass für $S^\bullet \in \mathcal{K}$ $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, S^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(P^\bullet, S^\bullet)$ bijektiv ist. Injektivität: Sei $f: P^\bullet \rightarrow S^\bullet$ mit $\text{id}^{-1}f = 0$ in $\mathcal{D}$. Dann existiert nach ?? ein $t: T^\bullet \rightarrow P^\bullet$ Quasiisomorphismus mit $ft = 0$. Also existiert mit (iii) ein $s: P^\bullet \rightarrow T^\bullet$, s.d. $ts = \text{id}_{P^\bullet}$, also

$$f = f \text{id}_{P^\bullet} = \underbrace{ft}_{=0} s = 0.$$

Surjektivität: Sei $a: P^\bullet \rightarrow S^\bullet$ in $\mathcal{D}$. Dann ist a gegeben durch ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & Q^\bullet & \\ \swarrow s & & \searrow f \\ P^\bullet & & S^\bullet \end{array}$$

in $\mathcal{K}$ mit s Quasiisomorphismus. Nach (iii) existiert ein $t: P^\bullet \rightarrow Q^\bullet$ mit $st = \text{id}_{P^\bullet}$. Dann ist

$$\begin{array}{ccccc} & & Q^\bullet & & \\ & \swarrow s & \uparrow t & \searrow f & \\ P^\bullet & \xleftarrow{\text{id}} & P^\bullet & \xrightarrow{ft} & S^\bullet \\ & \swarrow \text{id} & \downarrow \text{id} & & \\ & & P^\bullet & & \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in $\mathcal{K}$, also folgt $s^{-1}f = \text{id}^{-1}(ft)$ in $\mathcal{D}$.

□

Durch Umdrehen aller Pfeile erhalten wir analog:

Satz 3.8. Für jeden Komplex $I^\bullet \in \mathcal{K}$ sind äquivalent:

- (i) $I^\bullet$ K-injektiv
- (ii) Für $S^\bullet \in \mathcal{K}$ ist der natürliche Homomorphismus

$$\text{Mor}_{\mathcal{K}}(S^\bullet, I^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(S^\bullet, I^\bullet)$$

ein Isomorphismus.

- (iii) Für jedes Diagramm in $\mathcal{K}$

$$\begin{array}{ccc} Y^\bullet & \xrightarrow{f} & I^\bullet \\ \downarrow s & & \\ X^\bullet & & \end{array}$$

mit s Quasiisomorphismus, existiert genau ein $g: X^\bullet \rightarrow I^\bullet$, s.d. das Diagramm kommutiert.

- (iv) Für jeden Quasiisomorphismus $u: I^\bullet \rightarrow S^\bullet$ in $\mathcal{K}$ existiert ein $v: S^\bullet \rightarrow I^\bullet$, s.d. $vu = \text{id}_{I^\bullet}$ in $\mathcal{K}$.

3.2 Spezielle inverse und direkte Systeme

Um für einen Komplex $A^\bullet$ eine K-injektive bzw. K-projektive Auflösung zu erhalten, konstruieren wir bestimmte inverse bzw. direkte Systeme deren Limites die gewünschten Auflösungen liefern. Dazu benötigen wir folgenden Begriff:

Definition 3.9 (Spezielles inverses System). Sei $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}$ eine Klasse von Komplexen.

- (a) Ein inverses System $(I_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{K}$ heißt $\mathcal{J}$ -spezielles inverses System, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:
 - (i) Falls $n = 1$, dann ist $I_n^\bullet = 0$.
 - (ii) Falls $n > 1$, dann sei $C_n^\bullet$ der Kern der natürlichen Abbildung $I_n^\bullet \rightarrow I_{n-1}^\bullet$. Dann ist $C_n^\bullet \in \mathcal{J}$ und die kurze exakte Folge

$$0 \rightarrow C_n^\bullet \rightarrow I_n^\bullet \rightarrow I_{n-1}^\bullet \rightarrow 0$$

zerfällt stufenweise.

- (b) Die Klasse $\mathcal{J}$ heißt abgeschlossen unter speziellen inversen Limites, falls jedes $\mathcal{J}$ -spezielle inverse System in $\mathcal{K}$ einen Limes in $\mathcal{J}$ besitzt und jeder Komplex in $\mathcal{K}$, der isomorph ist zu einem Komplex in $\mathcal{J}$, bereits in $\mathcal{J}$ ist.

Im Folgenden möchten wir zeigen, dass die Klasse der K-projektiven Komplexe abgeschlossen unter speziellen inversen Limites ist. Dazu benötigen wir die folgenden Lemmata:

Lemma 3.10. Sei $\mathcal{J}_0$ eine Klasse von Objekten von $\mathcal{A}$. Sei weiter $\mathcal{J}$ eine unter speziellen inversen Limites abgeschlossene Klasse von Objekten in $\mathcal{K}$, so dass jeder Komplex $A^\bullet \in \mathcal{K}$ mit nur einem nicht-null Term und mit $A^i \in \mathcal{J}_0$ für $i \in \mathbb{Z}$, in $\mathcal{J}$ enthalten ist. Dann ist jeder nach unten beschränkte Komplex $A^\bullet \in \mathcal{K}$ mit $A^i \in \mathcal{J}_0$ für $i \in \mathbb{Z}$ in $\mathcal{J}$ enthalten.

Beweis. Sei $A^\bullet \in \mathcal{K}^+$ mit $A^i \in \mathcal{J}_0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Ohne Einschränkung sei $A^i = 0$ für alle $i < 0$. Dann sind die Spalten des nachstehenden Diagramms ein $\mathcal{J}$ -spezielles inverses System $(S_n^\bullet)_{n \geq 0}$ mit

Übergangsabbildungen p_n ,

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & A^0 & \longrightarrow & A^0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & A^1 & \longrightarrow & A^1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & A^2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

denn für $n > 0$ ist $\ker p_n^\bullet = [\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \underbrace{A^{n-1}}_{\in \mathcal{J}_0} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots]$. Nach Voraussetzung ist also $\ker p_n$ in $\mathcal{J}$ und die kurze exakte Folge $0 \rightarrow \ker p_n^\bullet \rightarrow S_n^\bullet \rightarrow S_{n-1}^\bullet \rightarrow 0$ zerfällt gradweise. Also folgt $A^\bullet = \lim S_n^\bullet \in \mathcal{J}$. $\square$

Lemma 3.11. Die Klasse der exakten Komplexe in $\mathcal{K}(\mathcal{A}b)$ ist abgeschlossen unter speziellen inversen Limites.

Beweis. Sei $(S_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ ein spezielles inverses System in $\mathcal{K}(\mathcal{A}b)$. Für $i \in \mathbb{Z}$ erfüllt $(S_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ die Bedingung P aus ???. Sei also $i \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann erfüllt

$$(S_n^{i-1})_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow (S_n^i)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow (S_n^{i+1})_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow (S_n^{i+2})_{n \in \mathbb{N}}$$

die Bedingungen von ??, da nach Voraussetzung für alle $n > 1$ $\ker(S_n^\bullet \rightarrow S_{n-1}^\bullet)$ exakt ist. Also ist

$$\begin{array}{ccccc}
 \lim S_n^{i-1} & \longrightarrow & \lim S_n^i & \longrightarrow & \lim S_n^{i+1} \\
 \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow = \\
 (\lim S_n)^{i-1} & \longrightarrow & (\lim S_n)^i & \longrightarrow & (\lim S_n)^{i+1}
 \end{array}$$

exakt. Da $i \in \mathbb{Z}$ beliebig, folgt $\lim S_n$ exakt. $\square$

Satz 3.12. Sei $\mathcal{B}$ eine weitere abelsche Kategorie und $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}(\mathcal{B})$ abgeschlossen unter speziellen inversen Limites. Angenommen inverse Limites existieren in $\mathcal{A}$ und sei $F: \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{B})$ ein kovarianter Funktor, der mit inversen Limites vertauscht und gradweise zerfallende kurze exakte Folgen erhält.

Dann ist $F^{-1}(\mathcal{J}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{A})$ abgeschlossen unter speziellen inversen Limites.

Beweis. Sei $(S_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ ein $F^{-1}(\mathcal{J})$ -spezielles inverses System. Dann ist $(F(S_n^\bullet))_{n \in \mathbb{N}}$ ein $\mathcal{J}$ -spezielles System, denn

- (i) $F(S_1) = F(1) = 0$, da F mit inversen Limites vertauscht und die Null der Limes des leeren Diagramms ist.
- (ii) Für $n > 1$ ist nach Voraussetzung

$$0 \longrightarrow \ker p_n \longrightarrow S_n^\bullet \xrightarrow{p_n} S_{n-1}^\bullet \longrightarrow 0$$

exakt, zerfällt gradweise und $\ker p_n$ ist in $F^{-1}(\mathcal{J})$. Nach Voraussetzung ist damit

$$0 \longrightarrow F(\ker p_n) \longrightarrow F(S_n^\bullet) \xrightarrow{F(p_n)} F(S_{n-1}^\bullet) \longrightarrow 0$$

exakt und zerfällt gradweise. Aus der Exaktheit folgt damit auch $\ker F(p_n) = F(\ker p_n)$, also $\ker F(p_n) \in \mathcal{J}$.

Also $F(\lim S_n^\bullet) = \lim F(S_n^\bullet) \in \mathcal{J}$ und damit $\lim S_n^\bullet \in F^{-1}(\mathcal{J})$. $\square$

Korollar 3.13. Sei $\mathcal{I}$ eine Klasse von Komplexen und angenommen in $\mathcal{A}$ existieren inverse Limites.

Dann ist die Klasse aller Komplexe $A^\bullet \in \mathcal{K}$, sodass $\text{Hom}^\bullet(T^\bullet, A^\bullet)$ exakt ist für alle $T^\bullet \in \mathcal{I}$, abgeschlossen unter speziellen inversen Limites. Insbesondere ist die Klasse der K-injektiven Komplexe abgeschlossen unter speziellen inversen Limites.

Beweis. Sei $\mathcal{J}$ die Klasse der exakten Komplexe und für $T^\bullet \in \mathcal{I}$ sei $\mathcal{E}_{T^\bullet}$ die Klasse der Komplexe $A^\bullet$, sodass $\text{Hom}^\bullet(T^\bullet, A^\bullet)$ exakt ist. Dann ist $\mathcal{E}_{T^\bullet} = \text{Hom}^\bullet(T^\bullet, -)^{-1}(\mathcal{J})$. $\text{Hom}^\bullet(T^\bullet, -)$ erfüllt die Voraussetzungen von 3.15, denn:

- (i) Nach 3.11 ist $\mathcal{J}$ abgeschlossen unter speziellen inversen Limites.
- (ii) Wegen ?? ist $\text{Hom}^\bullet(T^\bullet, -)$ rechtsadjungiert und vertauscht daher mit Limites. Außerdem ist $\text{Hom}^\bullet(T^\bullet, -)$ gradweise additiv, erhält also gradweise zerfallende Folgen.

Also ist $\mathcal{E}_{T^\bullet}$ und damit $\bigcap_{T^\bullet \in \mathcal{I}} \mathcal{E}_{T^\bullet}$ abgeschlossen unter speziellen inversen Limites.

Das Insbesondere folgt wenn $\mathcal{I} = \mathcal{J}$ gesetzt wird. $\square$

Wenn wir alle Pfeile umdrehen erhalten wir die folgende Definition und Ergebnisse:

Definition 3.14 (Spezielles direktes System). Sei $\mathcal{P} \subset \mathcal{K}$ eine Klasse von Komplexen.

- (a) Ein direktes System $(P_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{K}$ heißt $\mathcal{P}$ -spezielles direktes System, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:
 - (i) Falls $n = 1$, dann ist $P_n^\bullet = 0$.
 - (ii) Falls $n > 1$, dann sei $C_n^\bullet$ der Kokern der natürlichen Abbildung $P_{n-1}^\bullet \rightarrow P_n^\bullet$. Dann ist $C_n^\bullet \in \mathcal{P}$ und die kurze exakte Folge

$$0 \rightarrow P_{n-1}^\bullet \rightarrow P_n^\bullet \rightarrow C_n^\bullet \rightarrow 0$$

zerfällt stufenweise.

- (b) Die Klasse $\mathcal{P}$ heißt abgeschlossen unter speziellen direkten Colimites, falls jedes $\mathcal{P}$ -spezielle direkte System in $\mathcal{K}$ einen Colimes in $\mathcal{P}$ besitzt und jeder Komplex in $\mathcal{K}$, der isomorph ist zu einem Komplex in $\mathcal{P}$, bereits in $\mathcal{P}$ ist.

Durch Umdrehen aller Pfeile, erhalten wir auch eine duale Version von 3.10. Ebenfalls analog gilt:

Satz 3.15. Sei $\mathcal{B}$ eine weitere abelsche Kategorie und $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}(\mathcal{B})$ abgeschlossen unter speziellen inversen Colimites. Angenommen direkte Colimites existieren in $\mathcal{A}$ und sei $F: \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{B})$ ein kontravarianter Funktor, der direkte Colimites in inverse Limites überführt und gradweise zerfallende kurze exakte Folgen erhält.

Dann ist $F^{-1}(\mathcal{J}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{A})$ abgeschlossen unter speziellen direkten Colimites.

Korollar 3.16. Sei $\mathcal{I}$ eine Klasse von Komplexen und angenommen in $\mathcal{A}$ existieren direkte Colimites.

Dann ist die Klasse aller Komplexe $A^\bullet \in \mathcal{K}$, sodass $\text{Hom}^\bullet(A^\bullet, T^\bullet)$ exakt ist für alle $T^\bullet \in \mathcal{I}$, abgeschlossen unter speziellen direkten Colimites. Insbesondere ist die Klasse der K-projektiven Komplexe abgeschlossen unter speziellen direkten Colimites.

Definition 3.17. Angenommen inverse (bzw. direkte) Limites existieren in $\mathcal{K}$ und sei $\mathcal{G}$ eine Klasse von Komplexen in $\mathcal{K}$. Dann nennen wir $\mathcal{G}$ (bzw. $\mathcal{G}$) die kleinste Klasse von Komplexen in $\mathcal{K}$, die abgeschlossen unter speziellen inversen (bzw. direkten) Limites ist und $\mathcal{G}$ enthält.

3.3 Existenz von K -projektiven und K -injektiven Auflösungen

Sei $\mathcal{P}$ eine Klasse von Komplexen in $\mathcal{K}$. Die folgenden Bedingungen an $\mathcal{P}$ sind äquivalent:

- (1) Jeder nach oben beschränkte Komplex $A^\bullet \in \mathcal{K}$ hat eine Auflösung $P^\bullet \rightarrow A^\bullet$ nach links mit $P^\bullet \in \mathcal{P}$.
- (2) Für alle $A^\bullet \in \mathcal{K}$ und $n \in \mathbb{Z}$, existiert ein $P^\bullet \in \mathcal{P}$ mit $H^i(P^\bullet) = 0$ für $i > n$ und ein Komplexhomomorphismus $f: P^\bullet \rightarrow A^\bullet$, der einen Isomorphismus $H^i(P^\bullet) \rightarrow H^i(A^\bullet)$ induziert für $i \leq n$.

Beweis. (1) $\implies$ (2): Sei $A^\bullet \in \mathcal{K}$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\tau_{\leq n} A^\bullet$ nach oben beschränkt, also existiert ein $P^\bullet \in \mathcal{P}$ und ein Quasiisomorphismus $s: P^\bullet \rightarrow \tau_{\leq n} A^\bullet$. Durch Komposition mit dem natürlichen Komplexhomomorphismus $\tau_{\leq n} A^\bullet \rightarrow A^\bullet$ erhalten wir ein $f: P^\bullet \rightarrow A^\bullet$. Für $i > n$ ist nun $H^i(P^\bullet) = H^i(\tau_{\leq n} A^\bullet) = 0$. Für $i \leq n$ ist $H^i(\tau_{\leq n} A^\bullet) = H^i(A^\bullet)$, also induziert f den gewünschten Isomorphismus.

(2) $\implies$ (1): Sei $A^\bullet \in \mathcal{K}^-$. Ohne Einschränkung ist $A^i = 0$ für alle $i > 0$. Dann existiert für $n = 0$ ein $f: P^\bullet \rightarrow A^\bullet$ mit $P^\bullet \in \mathcal{P}$ und f induziert $H^i(P^\bullet) \xrightarrow[\sim]{0=H^i(f)} 0 = H^i(A^\bullet)$ für $i > 0$ und $H^i(P^\bullet) \xrightarrow[\sim]{H^i(f)} H^i(A^\bullet)$ für $i \leq 0$. Also ist f ein Quasiisomorphismus. $\square$

Im Folgenden nehmen wir an, dass $\mathcal{P}$ die Eigenschaft (1) erfüllt.

Beispiel 3.18. Falls $\mathcal{A}$ genügend Projektive hat, können wir $\mathcal{P}$ als die Klasse der nach oben beschränkten Komplexe $P^\bullet \in \mathcal{K}$ mit P^i projektiv für alle $i \in \mathbb{Z}$ wählen.

Ein solches $P^\bullet$ ist K -projektiv, denn: Für alle eingradigen Komplexe $Q^\bullet$ mit Q^i projektiv für alle $i \in \mathbb{Z}$ ist $Q^\bullet$ nach 3.4 K -projektiv. Da nach 3.16 die Klasse der K -projektiven abgeschlossen unter speziellen direkten Colimites ist, folgt mit dem Dual von 3.10, dass $P^\bullet$ K -projektiv ist.

Erneut nach 3.16 sind die Komplexe in $\mathcal{P}$ damit ebenfalls K -projektiv.

Unser Ziel ist nun für einen gegebenen Komplex $A^\bullet$ eine Auflösung nach Links durch einen Komplex aus $\mathcal{P}$ zu konstruieren. Dazu schneiden wir den Komplex nach oben ab und lösen schrittweise auf. Das folgende Lemma führt diese Konstruktion aus.

Lemma 3.19. Sei $A^\bullet \in \mathcal{K}$. Dann existiert ein $\mathcal{P}$ -spezielles direktes System $(P_n^\bullet)_{n \geq -1}$ und ein direktes System von Kettenhomomorphismen $f_n: P_n^\bullet \rightarrow \tau_{\leq n} A^\bullet$, sodass f_n ein Quasiisomorphismus ist für alle $n \geq 0$.

Beweis. Wir gehen induktiv vor. Setze $P_{-1}^\bullet = 0$ und $f_{-1} = 0$. Nach (1) existiert ein Quasiisomorphismus $f_0: P_0^\bullet \rightarrow \tau_{\leq 0} A^\bullet$ mit $P_0^\bullet \in \mathcal{P}$.

Sei nun $n \geq 1$ und seien $P_{-1}^\bullet, \dots, P_{n-1}^\bullet$ und $f_{-1}, \dots, f_{n-1}$ konstruiert. Dann setze $P^\bullet = P_{n-1}^\bullet$, $B^\bullet = \tau_{\leq n} A^\bullet$. Es sei $a_{n-1}: \tau_{\leq n-1} A^\bullet \rightarrow \tau_{\leq n} A^\bullet$ der natürliche Komplexhomomorphismus und $f = a_{n-1} f_{n-1}$.

Da $B^\bullet = \tau_{\leq n} A^\bullet$ nach oben beschränkt ist und $C_f^i = P^{i+1} \oplus B^i$.

Mit (1) existiert ein Quasiisomorphismus $g: Q^\bullet \rightarrow C_f[-1]$ mit $Q^\bullet[1] \in \mathcal{P}$. $\square$

4 Adjunktion von abgeleitetem Hom und Tensorprodukt