Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. (a) Beh.: $\underline{w}$ ist eine Basis von $W = K[X]_{\leq 3}$

Beweis. Zz.: $\underline{w}$ ist linear unabhängig
Seien $a, b, c, d \in K$ mit

$$\begin{aligned} &aX^0 + b(X^0 + X^1) + c(X^1 - X^2 + X^3 + d(X^3 + X^0) = 0 \\ \implies &X^0(a+b+d) + X^1(b+c) + X^2(-c) + X^3(c+d) = 0. \end{aligned}$$

Wegen $\underline{v}$ linear unabhängig, folgt:

$$c = 0 \implies d = 0 \implies b = 0 \implies a = 0.$$

Zz.: $\underline{w}$ ist Erzeugendensystem
Sei $v \in K[X]_{\leq 3}$ beliebig, dann ex. $a, b, c, d \in K$ wegen $\underline{v}$ Basis s.d. $v = aX^0 + bX^1 + cX^2 + dX^3$.
Wähle nun $\alpha := a - b - 2c - d, \beta := b + c, \gamma := -c, \delta := c + d$. Damit folgt direkt:

$$\begin{aligned} v &= \alpha X^0 + \beta(X^0 + x^1) + \gamma(X^1 - X^2 + X^3) + \delta(X^3 + X^0) \\ &= aX^0 + bX^1 + cX^2 + dX^3. \end{aligned}$$

$\implies \underline{w}$ ist Basis ☐

(b) Seien $\phi_{\underline{v}} \colon K^4 \to K[X]_{\leq 3}$ und $\phi_{\underline{w}} \colon K^4 \to K[X]_{\leq 3}$ die kanonischen Isomorphismen.

(i)

$$M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(\partial) = A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Zu zeigen.: $F_{\underline{v}}^{\underline{v}}(A) = \partial$.
Zu überprüfen für die vier Basisvektoren von $K[X]_{\leq 3}$ aus $\underline{v}$.

$$F_{\underline{v}}^{\underline{v}}(A) = \phi_{\underline{v}} \circ F_{4,4}(A) \circ \phi_{\underline{v}}^{-1}.$$

i. $v_1 = X_0$, $\phi_{\underline{v}}^{-1}(X^0) = (1, 0, 0, 0)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\implies \phi_{\underline{v}}(0, 0, 0, 0) = 0 = \partial(X_0)$

ii. $v_2 = X_1$, $\phi_{\underline{v}}^{-1}(X^1) = (0, 1, 0, 0)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\implies \phi_{\underline{v}}(1, 0, 0, 0) = X^0 = \partial(X_1)$

iii. $v_3 = X_2$, $\phi_{\underline{v}}^{-1}(X^2) = (0, 0, 1, 0)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\implies \phi_{\underline{v}}(0, 2, 0, 0) = 2X^1 = \partial(X_2)$

iv. $v_4 = X_3$, $\phi_{\underline{v}}^{-1}(X^3) = (0,0,0,1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\implies \phi_{\underline{v}}(0,0,3,0) = 3X^2 = \partial(X_3)$

$\implies F_{\underline{v}}^{\underline{v}}(A) = \partial$ $\square$

(ii)

$$M_{\underline{w}}^{\underline{v}}(id_W) = A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Zu zeigen.: $F_{\underline{w}}^{\underline{v}}(A) = id$
Zu überprüfen für die vier Basisvektoren von $K[X]_{\leq 3}$ aus $\underline{v}$.

$$F_{\underline{w}}^{\underline{v}}(A) = \phi_{\underline{w}} \circ F_{4,4}(A) \circ \phi_{\underline{v}}^{-1}.$$

i. $v_1 = X_0$, $\phi_{\underline{v}}^{-1}(X^0) = (1,0,0,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\implies \phi_{\underline{w}}(1,0,0,0) = X^0 = id_W(X^0)$

ii. $v_2 = X_1$, $\phi_{\underline{v}}^{-1}(X^1) = (0,1,0,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\implies \phi_{\underline{w}}(-1,1,0,0) = -X^0 + X^0 + X^1 = X^1 = id_W(X^1)$

iii. $v_3 = X_2$, $\phi_{\underline{v}}^{-1}(X^2) = (0,0,1,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\implies \phi_{\underline{w}}(-2,1,-1,1) = -2X^0 + X^0 + X^1 - X^1 + X^2 - X^3 + X^3 + X^0 = X^2 = id_W(X^2)$

iv. $v_4 = X_3$, $\phi_{\underline{v}}^{-1}(X^3) = (0,0,0,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\implies \phi_{\underline{w}}(-1,0,0,1) = -X^0 + X^3 + X^0 = X^3 = id_W(X^3)$

$\implies F_{\underline{w}}^{\underline{v}}(A) = id_W$ $\square$

(iii)

$$M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(id_W) = A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Erfolgt analog zu (ii). $\square$

(iv)

$$M_{\underline{w}}^{\underline{w}}(\partial) = M_{\underline{w}}^{\underline{v}}(id_W) \cdot M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(\partial) \cdot M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(id_W) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(v)

$$M_{\underline{w}}^{\underline{v}}(\partial) = M_{\underline{w}}^{\underline{v}}(id_W) \cdot M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(\partial) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(vi)

$$M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\partial) = M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(\partial) \cdot M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(id_W) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Seien $f\colon U \to V$ und $g\colon V \to W$ lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen.

(a) Beh.: $\dim \ker(g \circ f) \leq \dim \ker g + \dim \ker f$

Beweis. Schränke g auf $\text{Bild}(f)$ ein durch $g'\colon \text{Bild}(f) \to W$ mit $v \mapsto g(v)$.

$$\begin{aligned} \dim \ker\, (g \circ f) &= \dim U - \dim(\text{Bild}(g \circ f)) \\ &= \dim U - \text{Rg}(g') \\ &= \text{Rg}(f) - \text{Rg}(g') + \dim U - \text{Rg}(f) \\ &= \dim \ker g' + \dim \ker f \\ &\leq \dim \ker g + \dim \ker f. \end{aligned}$$

□

(b) Beh.: $\text{Rg}(f) - \text{Rg}(g \circ f) \leq \dim V - \text{Rg}(g)$

Beweis. Aus (a) folgt:

$$\begin{aligned} &\dim \ker(g \circ f) \leq \dim \ker(g) + \dim \ker(f) \\ \implies &\dim U - \text{Rg}(g \circ f) \leq \dim V - \text{Rg}(g) + \dim U - \text{Rg}(f) \\ \implies &\text{Rg}(f) - \text{Rg}(g \circ f) \leq \dim V - \text{Rg}(g). \end{aligned}$$

□

(c) Beh.: Für $A \in M_{n,m}(K)$ und $B \in M_{l,n}(K)$ gilt $S\text{Rg}(A) - S\text{Rg}(B \cdot A) \leq n - S\text{Rg}(B)$.

Beweis. Seien $A \in M_{n,m}(K)$ und $B \in M_{l,n}(K)$ beliebig, dann definiere $f := F_{n,m}(A)$ und $g := F_{l,n}(B)$. Damit folgt: $F_{m,l}(B \cdot A) = g \circ f$.

Dann folgt aus (b) direkt:

$$\text{Rg}(f) - \text{Rg}(g \circ f) \leq \dim K^n - \text{Rg}(g).$$

Mit $\text{Rg}(f) = S\text{Rg}(A)$, $\text{Rg}(g) = S\text{Rg}(B)$ und $\text{Rg}(g \circ f) = S\text{Rg}(A \cdot B)$ ergibt sich

$$S\text{Rg}(A) - S\text{Rg}(B \cdot A) \leq n - S\text{Rg}(B).$$

□

Aufgabe 3. Sei V ein Vektorraum, U ein Untervektorraum und W ein Komplement von U in V.

(a) Beh.: Es existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\pi\colon V \to V$, welche eingeschränkt auf U die Identität und eingeschränkt auf W konstant null ist.

Beweis. Sei $(v_i)_{i\in I}$ Basis von U und $(v_j)_{j\in J}$ mit $J \cap U = \emptyset$ Basis von W. Damit ist $(v_i)_{i\in I\cup J}$ Basis von V. Definiere $\pi\colon V \to V$ linear mit

$$\pi(v_i) = \begin{cases} v_i & \text{falls } i \in I \\ 0 & \text{falls } i \in J \end{cases}.$$

Schränke nun π auf U ein: Dann ex. für alle $u \in U$ ein $(\alpha_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$, s.d. $v = \sum_{i\in I} \alpha_i v_i$. Damit:

$$\pi(v) = \sum_{i\in I} \alpha_i \pi(v_i) = \sum_{i\in I} \alpha_i v_i = v.$$

Schränke nun π auf W ein: Dann ex. für alle $w \in W$ ein $(\alpha_j)_{j\in J} \in K^{(J)}$, s.d. $v = \sum_{i\in J} \alpha_j v_j$. Damit

$$\pi(v) = \sum_{j\in J} \alpha_j \pi(v_j) = 0.$$

π ist eindeutig, da eindeutig durch die Basisvektoren definiert. □

(b) Beh.: Für dieses π gilt: $\pi \circ \pi = \pi$.

Beweis. Seien die Basen wie in (a). Sei $v \in V$ beliebig. Dann ex. ein $(\alpha_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$ und ein $(\beta_j)_{j\in J} \in K^{(J)}$, s.d.

$$v = \sum_{i\in I} \alpha_i v_i + \sum_{j\in J} \beta_j v_j.$$

Damit gilt

$$\pi(v) = \sum_{i\in I} \alpha_i \pi(v_i) + \sum_{j\in J} \beta_j \pi(v_j) = \sum_{i\in I} \alpha_i v_i.$$

$\Longrightarrow$

$$\pi(\pi(v)) = \pi\left(\sum_{i\in I} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i\in I} \alpha_i v_i = \pi(v).$$

$\Longrightarrow \pi = \pi \circ \pi$ □

(c) Beh.: Für $\pi : V \to V$ eine lineare Abbildung gilt

$$V \cong \mathrm{Bild}(\pi) \oplus \ker \pi.$$

Beweis. Sei U Komplement zu $\ker \pi$ und $(u_i)_{i\in I}$ Basis von U.

Wegen Homomorphiesatz gilt: $\mathrm{Bild}(\pi) \cong V/\ker(\pi)$. Nach Blatt 6 Aufg. 3c) gilt: $(u_i + \ker \pi)_{i\in I}$ ist Basis von $V/\ker(\pi)$.

Wegen $(u_i)_{i\in I}$ Basis von U, folgt also $V/\ker(\pi) \cong U$. Damit:

$$\mathrm{Bild}(\pi) \cong V/\ker(\pi) \cong U.$$

Da U das Komplement zu $\ker \pi$ ist, folgt daraus direkt:

$$\mathrm{Bild}(\pi) \oplus \ker \pi \cong U \oplus \ker \pi \cong V.$$

□

Aufgabe 4.

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Sei $\underline{e}$ die kanonische Basis des $V := \mathbb{Q}^2$.

1. Wähle $U = V$ und $W = \{0\}$ und wähle $\pi = id$ in der kanonischen Basis, damit gilt

$$A_1 := M(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenschaften sind für die Einheitsmatrix offensichtlich erfüllt.

2. Wähle die Basis $\underline{v} = \{(1,1),(1,0)\}$ und damit $U = \text{Lin}((1,1))$ und $W = \text{Lin}((1,0))$.
   Nun definiere $\pi : V \to V$ mit $\pi((1,1)) = (1,1)$ und $\pi((1,0)) = (0,0)$. Die Darstellungsmatrix von $\underline{v}$ nach $\underline{e}$ ergibt sich damit durch:
$$A_2 := M_{\underline{e}}^{\underline{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
$$A_2 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_2.$$
$$A_2 \cdot (1,1)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,1)^t.$$

3. Wähle die Basis $\underline{v} = \{(0,1),(1,1)\}$ und damit $U = \text{Lin}((1,1))$ und $W = \text{Lin}((0,1))$.
   Nun definiere $\pi : V \to V$ mit $\pi((1,1)) = (1,1)$ und $\pi((0,1)) = (0,0)$. Die Darstellungsmatrix von $\underline{v}$ nach $\underline{e}$ ergibt sich damit durch:
$$A_3 := M_{\underline{e}}^{\underline{v}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A_3 \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_3.$$
$$A_3 \cdot (1,1)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,1)^t.$$

$\square$