1 Folgen und Reihen

1.1 Folgen

Eine Zahlenfolge ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$, d.h. $n \mapsto a_n \in \mathbb{R}$.

Teilfolge: $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wobei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen, weile streng monoton wächst, d.h. $n_1 < n_2 < \dots$. bzw. $n_k < n_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$

Beispiel 1. $(-1)^n$ hat zwei Teilfolgen: $(-1)^{2n} = 1$ und $(-1)^{2n+1} = -1$.

Definition 1 (Konvergenz, Beschränktheit, Monotonie von Folgen)**.**

1. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $|a_n| \leq C$.

   Sie heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt falls $\exists C \in \mathbb{R}$, s.d. $a_n \leq C$(bzw. $a_n \geq C$)$\forall n \in \mathbb{N}$
2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt monoton wachsend (fallend), wenn $a_n \leq a_{n+1}$ $(a_n \geq a_{n+1})$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$.
3. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$, s.d.

$$|a_n - a| < \epsilon \qquad \forall n \geq n_\epsilon.$$

4. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt divergent, falls sie gegen keine reelle Zahl konvergiert.

Bemerkung 1.

1. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ falls in jeder ϵ-Umgebung $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ fast alle Folgenelemente liegen.
2. In Def. kann auch $\leq \epsilon$ und statt ϵ kann man $\frac{1}{N}$ für beliebig große $N \in \mathbb{N}$ schreiben.

Satz 1. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn sie Cauchy-Folge ist, d.h. $\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall n, m \geq n_\epsilon$ gilt: $|a_n - a_m| < \epsilon$.

Satz 2 (Eindeutigkeit des Limes)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a, a' \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a'$, dann gilt $a = a'$.

Beweis. Angenommen $a \neq a'$. Definiere $\epsilon := \frac{|a-a'|}{2} > 0$.

Dann $\exists n_1, n2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_1$ und $|a_n - a'| < \epsilon \quad \forall n \geq n_2$.

Dann $\forall n \geq \max\{n_1, n_2\}$ gilt:

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < \epsilon + \epsilon = |a - a'|.$$

$\implies |a - a'| < |a - a'|$. Widerspruch $\implies a = a'$ □

Satz 3. Konvergente Folgen sind beschränkt.

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \to a, n \to \infty, a \in \mathbb{R}$.

Wähle $\epsilon = 1$. Dann $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1 \quad \forall n \geq n_\epsilon$.

Dann gilt $\forall n \geq n_\epsilon$:

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|.$$

$$\implies |a_n| \leq \left(\max_{k=1,\dots,n_\epsilon} |a_k|\right) + |a| + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Satz 4 (Konvergenz und Nullfolgen)**.** Eine Nullfolge ist eine Folge, die gegen Null konvergiert. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Dann sind äquivalent:

1. $a_n \to a, n \to \infty$
2. $(a_n - a) \to 0$
3. $|a_n - a| \to 0$

Beweis. durch Behauptung. □

Satz 5 (Konvergenz von Teilfolgen)**.** Teilfolgen einer gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergierenden Folge konvergieren ebenfalls gegen $a \in \mathbb{R}$.

Beweis. trivial. □

Satz 6 (Einschließungskriterium (Sandwich))**.** Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ und $\lim_{n\to\infty} c_n = c$.

1. Falls $a_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies a \leq c$.
2. Falls $a = c$ und $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies b = a \implies \lim_{n\to\infty} b_n = a$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$.

1. $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ und $|c_n - c| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_\epsilon$.
   Dann: $a - c \leq a - (a_n - c_n) - c \leq |a - a_n| + |c_n - c| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$
   $\implies \forall \epsilon > 0$ gilt $a - c < \epsilon \implies a - c \leq 0$
2. $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$ und $|c_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$
   Dann gilt $\forall n \geq n_\epsilon$ und wegen $|a_n| \leq |b_n| \leq |c_n|$:
   $$-\epsilon < -|a_n - a| \leq a_n - a \leq b_n - a \leq c_n - a \leq |c_n - a| < \epsilon.$$
   $\implies -\epsilon < b_n - a < \epsilon \implies |b_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$
   $\implies \lim_{n\to\infty} b_n = a$

□

Satz 7 (Rechenregeln für konvergente Folgen)**.** Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

1. $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$
2. $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$
4. Falls $b \neq 0$, gilt $b_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.
5. Falls $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies a \geq 0$ und $(a_n)^{\frac{1}{k}} \to a^{\frac{1}{k}}, n \to \infty$.

Beweis. durch Zurückblättern. □

Satz 8 (monoton + beschränkt $\implies$ konvergent)**.** Eine monoton wachsende (fallende) nach oben (unten) beschränkte Folge konvergiert gegen ihr Supremum:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n|n \in \mathbb{N}\} = \min\{c \in \mathbb{R}|a_n \leq c\}.$$

bzw. ihr Infimum:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n := \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \max\{c \in \mathbb{R} \mid a_n \geq c\}.$$