0.1 Konvergenz in $\mathbb{C}$

Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen ($z_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$) konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$, s.d. $|z_n - z| < \epsilon\ \forall n \geq n_\epsilon$

Genauso wird die Beschränktheit und Begriff der C.F. übertragen.

Aus Definitionen:

$$|z| := \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}.$$

und der Ungleichung:

$$max(|x|, |y|) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

folgt:

1. $z_n \to z, n \to \infty$ in $\mathbb{C} \iff \mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z)$
2. $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine C.F. in $\mathbb{C} \iff$
   $(\mathrm{Re}(z_n))_n$ und $(\mathrm{Im}(z_n))_n$ sind C.F. in $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{C}$ ist vollständig, d.h. jede C.F. in $\mathbb{C}$ ist konvergent.
4. Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beispiel 0.1.

1. $\frac{1+i(n+1)}{n} = \frac{1}{n} + i\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to i,\ n \to \infty$
2. $z_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n = \left(\frac{i}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{i}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$
   $|z_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0,\ n \to \infty$
3. $q^n \to 0,\ n \to \infty\ \forall q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$.

0.2 Unendliche Summe („Reihen")

Definition 0.2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Wir betrachten die Folge der n-ten Partialsumme $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch:

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert (divergiert), wenn die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (divergiert).

Im Fall von Konvergenz bezeichnet:

$$s_\infty := \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

die Summe oder den Wert der Reihe.

Bemerkung 0.3. Man kann auch Reihen $\sum_{k=l}^{\infty} a_k$ mit $l \in \mathbb{Z}$ betrachten.

Beispiel 0.4 (Geometrische Reihe)**.**

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots.$$

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert genau für alle $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Beweis. Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \quad q \neq 1 \\ n+1 & \qquad\quad q = 1 \end{cases}.$$

Für $|q| < 1$ gilt $|q|^{n+1} \to 0$, $n \to \infty$

$$\implies s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \to \frac{1}{1 - q} \quad \text{für } |q| < 1.$$

Bleibt zu zeigen: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergent für $|q| \geq 1$.

Angenommen $\exists q \in \mathbb{C}$ mit $|q| \geq 1$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Dann

$$|q|^{n+1} = |\underbrace{s_{n+1}}_{\to s_*} - \underbrace{s_n}_{\to s_*}|.$$

Widerspruch, da $|q|^{n+1} \geq 1$ für $|q| \geq 1$ □

Lemma 0.5. Ist $\sum_k^{\infty} a_k$ konvergent, dann ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Beweis. $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n \to s_\infty - s_\infty = 0$, $n \to \infty$ □

Bemerkung 0.6. Die Eigenschaft von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge zu sein, reicht nicht für die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ aus!

Beispiel 0.7 (Harmonische Reihe)**.**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \qquad \text{ist strikt divergent.}$$

Beweis. Folge der Partialsummen ist unbeschränkt:

$$\begin{aligned} S_{2^m} &= \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \\ &= \underbrace{1}_{\geq\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^m}}_{\geq 2^{m-1}\cdot\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2}} \geq \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

□

Beispiel 0.8.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k.$$

a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots = 0.$$

b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots = 1 + 0 + 0 = 1$$

c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}.$$

Alles Falsch (Kostina: „Alles Schrot!"), weil $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ divergent.

0.2.1 Konvergenzkriterien

Die Konvergenz einer Reihe ist nichts anderes als die Konvergenz der Folge der Partialsummen.

Satz 0.9. 1.
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_\infty \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_\infty.$$
$\Longrightarrow$
$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda a_\infty + \mu b_\infty \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

2. Ist $a_k \in \mathbb{R}$ mit $a_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ dann gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\iff$ $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt.

Beweis. (1) folgt aus der linearen Kombination von Folgen.
(2) Falls $a_k \geq 0 \implies$ Folge $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

Für solche Folgen gilt: Konvergenz $\iff$ Beschränktheit □

Satz 0.10 (Leibniz-Kriterium)**.** Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende reelle Nullfolge, so ist die alternierende Reihe:
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots.$$
konvergent mit folgender Abschätzung:
$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k\right| \leq |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Aus Voraussetzungen: $a_k \geq 0$, $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$.
$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} \overset{a_{2n}\geq a_{2n+1}}{\geq} s_{2n-1}.$$
Folge mit ungeraden Indizes: $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \ldots$.
$$s_{2n} = s_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n} \leq s_{2n-2}.$$
Folge mit geraden Indizes: $\ldots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$

$s_{2n} > s_{2n+1}$ $(s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1})$
$s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \to 0$, $n \to \infty$

$s_1 \geq s_3 \leq s_5 \leq \ldots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$

$\Longrightarrow$ $[s_{2n+1}, s_{2n}]$ bilden eine Intervallschachtelung, d.h.
$$\exists s_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty}[s_{2k+1}, s_{2k}].$$
$s_\infty = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$
$$s_{2n+1} \leq s_\infty \leq s_{2n}.$$
Damit gilt $\forall k \in \mathbb{N}$:
$$0 \leq s_\infty - s_{2n+1} \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1}.$$
und
$$0 \geq s_\infty - s_{2n} \geq s_{2n+1} - s_{2n} = -a_{2n+1} \geq -a_{2n}.$$
$\Longrightarrow$
$$0 \leq |s_\infty - s_n| \leq a_n \to 0 \quad n \to \infty.$$
und
$$\left|\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}_{s_\infty} - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| \leq a_n.$$
□

Beispiel 0.11 („Alternierende harmonische Reihe”).

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots.$$

ist konvergent

Definition 0.12. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispiel 0.13. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ ist konvergent nach Leibniz Kriterium, aber nicht absolut konvergent, weil $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergiert.

Satz 0.14. Aus absoluter Konvergenz einer Reihe folgt deren Konvergenz.

Beweis. Sei $\sum_k a_k$ absolut konvergent, d.h. $\sum_k |a_k|$ konvergiert.

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, t_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Dann gilt für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$.

$$|s_m - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = t_m - t_n = |t_m - t_n|.$$

Da $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\implies$ $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist C.F.

Aus $|s_m - s_n| \leq |t_m - t_n| < \epsilon$

$$\begin{aligned} &\implies (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist auch C.F. in } \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C} \\ &\implies \sum_k a_k \quad \text{konvergiert.} \end{aligned}$$

□