Beweis. Sei $f(a) < y < f(b)$ (die Fälle $y = f(a)$ oder $y = f(b)$ sind trivial). Betrachte $g(x) := f(x) - y$. $g(x)$ stetig und $g(a) < 0, g(b) > 0$.

Wir suchen die Nullstelle $c \in [a, b]$ mit $g(c) = 0$ mit dem Intervallschachtelungsprinzip in $\mathbb{R}$.

Starte mit $I_0 = [a_0, b_0] := [a, b]$, es gilt $g(a_0) \cdot g(b_0) < 0$. Sei $c_0 := \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ der Mittelpunkt von $[a_0, b_0]$. Falls $g(c_0) = 0$, dann ist c_0 Nullstelle von $g(x)$. Sonst setze

$$I_1 = [a_1, b_1] = \begin{cases} [a_0, c_0] & \text{für } g(a_0)g(c_0) < 0 \\ [c_0, b_0] & \text{für } g(c_0)g(b_0) < 0 \end{cases}.$$

Es gilt $g(a_1) \cdot g(b_1) < 0$ und $|a_1 - b_1| = \frac{1}{2}|a_0 - b_0|$ usw.

Nach endlich vielen Schritten erhalten wir entweder eine Nullstelle c_n von $g(x)$. Dann ist $c = c_n$, oder eine unendliche Folge von geschachtelten Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften $g(a_n)g(b_n) < 0$ und

$$|b_n - a_n| = \frac{1}{2}|b_{n-1} - a_{n-1}| = \ldots = \left(\frac{1}{2}\right)^n |b_0 - a_0|.$$

wird konstruiert. $\implies$

$$\exists c = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \text{ und } c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Nach Konstruktion $g(a_n)g(b_n) < 0$. Wegen der Stetigkeit und den Eigenschaften des Limes gilt $g(a_n)g(b_n) \to g(c)g(c) \leq 0, n \to \infty$
$\implies g(c) = 0$ □

Bemerkung 0.1.

1. Bisektionsverfahren zur Berechnung einer Nullstelle einer stetigen Funktion funktioniert wie im Beweis des Zwischenwertsatzes.
2. Eine stetige Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit Bildbereich $B \subset [a, b]$ besitzt einen „Fixpunkt", d.h. $\exists c \in [a, b]$ mit $f(c) = c$ (Folgt aus Beweis des Zwischenwertsatzes mit $g(x) = f(x) - x$
3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist $f(I)$ ebenfalls ein Intervall. Konvention: $f \equiv a$ konstant, dann $f(I) = [a, a]$.

   Beweis. Setze $B := \sup\{f(x) \mid x \in I\}$ falls f nach oben beschränkt, sonst $B := \infty$ und $A := \inf\{f(x) \mid x \in I\}$ falls f nach unten beschränkt, sonst $A := -\infty$. Sei $y \in \mathbb{R}$ mit $A < y < B$. Nach Definition $\exists x_0, x_1 \in I$ mit $f(x_0) < y < f(x_1)$.
   $\overset{\text{ZWS}}{\implies} \exists x \in I$ mit $f(x) = y$
   $\implies\ ]A, B[\ \subset f(I)$. Damit:

   $$f(I) \in \{]A, B[, [A, B[,]A, B], [A, B]\}.$$

   □

Definition 0.2 (Monotone Funktionen)**.** Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$.

$$f \text{ heißt } \begin{cases} \text{monoton wachsend} & f(x) \leq f(x') \\ \text{streng monoton wachsend} & f(x) < f(x') \\ \text{monoton fallend} & f(x) \geq f(x') \\ \text{streng monoton fallend} & f(x) > f(x') \end{cases} \quad \forall x, x' \in D \text{ mit } x < x'.$$

Satz 0.3 (Stetigkeit der Umkehrfunktion)**.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige streng monoton wachsende (streng monoton fallende) Funktion.

Dann ist $f\colon I \to f(I)$ bijektiv und $f^{-1}\colon f(I) \to I$ ebenfalls stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Beweis. $f(I)$ ist wieder ein Intervall, f ist streng monoton $\implies$ injektiv $\implies$ $f: I \to f(I)$ bijektiv, d.h. $\exists f^{-1}$.

Außerdem $f(x_1) < f(x_2) \implies$

$$\begin{cases} f^{-1}(f(x_1)) = x_1 < x_2 = f^{-1}(f^{(x_2)}) & f \text{ wachsend} \\ f^{-1}(f(x_1)) = x_1 > x_2 = f^{-1}(f^{(x_2)}) & f \text{ fallend} \end{cases}.$$

$\implies$ f^{-1} auch streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Zu zeigen: $f^{-1}\colon f(I) \to I$ ist stetig. O.B.d.A. f wachsend (sonst $\to -f$). Sei $y_0 \in f(I)$ mit $x_0 := f^{-1}(y_0)$ und $\epsilon > 0$.

1. Fall: x_0 ist kein Randpunkt, sei $\epsilon > 0$ so klein, dass $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\subset I$. Dann

$$y_- := f(x_0 - \epsilon) < y_0 < f(x_0 + \epsilon) =: y_+.$$

Definiere $\delta := \min(y_+ - y_0, y_0 - y_-)$. $\implies$

.

$B_\delta(y_0) \subset]y_-, y_+[\overset{\text{ZWS}}{\subset} f\,]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\quad | f^{-1} \implies \quad f^{-1}(]y_0 - \delta, y_0 + \delta[) \subset f^{-1}(f(]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[)) =]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$
$\implies$ f^{-1} stetig in y_0 nach Definition.

2. Fall: x_0 ist Randpunkt $\implies$ y_0 ist Randpunkt. Gleiche Argumentation wie oben mit $[x_0 - \epsilon, x_0]$ bzw. $[x_0, x_0 + \epsilon]$ □

Beispiel 0.4.

1. Wurzeln sind stetig

   Für $k \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$, $f(x) := x^k$ streng monoton wachsend und surjektiv.
   $\implies$ Die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [0, \infty[\to [0, \infty[$ ist stetig und streng monoton wachsend mit $f^{-1}(x) = \sqrt[k]{x}$

2. ln ist stetig

Satz 0.5 (Logarithmus)**.** $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ ist streng monoton wachsend mit $\exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[$. Die Umkehrfunktion $\ln\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ ist stetig, streng monoton wachsend und heißt natürlicher Logarithmus. $\ln(x) = \log_e(x)$.

Es gibt die Funktionalgleichung

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \quad \forall x, y \in]0, \infty[.$$

Beweis. $f(x) = \exp(x) = e^x \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

1. e^x ist streng monoton wachsend, weil für $k > 0$ gilt $e^k > 1$ und für $x < x'$ folgt $\exists h > 0$ s.d. $x' = x + h$.
   $\implies e^x < e^x \cdot \underbrace{e^h}_{>1} = e^{x'} \implies e^x$ injektiv

2. e^x surjektiv, weil: Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Folge $(e^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert strikt, da $e > 1 \implies$ Folge $(e^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.
   $\implies \exists n \in \mathbb{N}$ mit $e^{-n} < a < e^n$.

   Die Exponentialfunktion ist auf $\mathbb{R}$ und auch auf $[-n, n]$ stetig $\overset{\text{ZWS}}{\implies} \exists c \in [-n, n]$, s.d. $e^c = a \implies$ e^x surjektiv

3. Nach Umkehrfunktionssatz folgt $\ln(x)$ ist stetig und strikt monoton wachsend $\forall [e^{-n}, e^n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$
   $\implies \ln\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.

4. Z.z.: $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$.
   Für x, y gilt

$$\begin{aligned} & \exp(\ln x + \ln y) = e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} = x \cdot y \qquad \mid \ln \\ \implies & \ln(e^{\ln x + \ln y}) = \ln x + \ln y = \ln(x \cdot y). \end{aligned}$$

$\square$