Definition 0.1 (a^x)**.** Für $a > 0$ wird die Funktion $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto a^x$ definiert durch

$$\exp_a(x) := a^x := \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}.$$

Lemma 0.2 (Eigenschaften von a^x)**.** Sei $a > 0$:

1. $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig
2. $\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
3. $\exp_a(n) = a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{mal}} \quad n \in \mathbb{N}$
4. $\exp_a(n) = a^n \quad n \in \mathbb{Z}$
5. $\exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p} \quad \forall p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$
6. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
7. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
8. $a^x b^x = (ab)^x \quad b > 0, x \in \mathbb{R}$
9. $\frac{1}{a^x} = a^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Beweis. trivial. □

0.1 Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 0.3 (gleichmäßige Stetigkeit)**.** Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig auf D, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit } |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \forall x, y \in D \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Bemerkung 0.4.

1. Jede gleichmäßige stetige Funktion auf D ist auch stetig
2. Unterschied zwischen stetig und gleichmäßig stetig:
   - stetig: δ hängt von ϵ und x ab
   - gleichmäßig stetig: δ hängt nur von ϵ ab

Beispiel 0.5. $f\colon]0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$

f stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Beweis. Wähle $\epsilon = 1$. Angenommen: $\exists \delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < 1 \ \forall x, y \in]0,1]$ mit $|x - y| < \delta$.

$\exists n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \delta$. Für $x := \frac{1}{n}$ und $y := \frac{1}{2n}$ gilt $|x - y| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}| = |\frac{1}{2n}| < \delta$, aber $|f(x) - f(y)| = |n - 2n| = n \geq 1$. Widerspruch □

Satz 0.6. Auf kompakten Mengen (Intervallen) gilt: stetig $\iff$ gleichmäßig stetig

Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $D \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis. Ang. f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann $\exists \epsilon_0 > 0$ mit $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n, y_n \in D$, s.d. $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$.

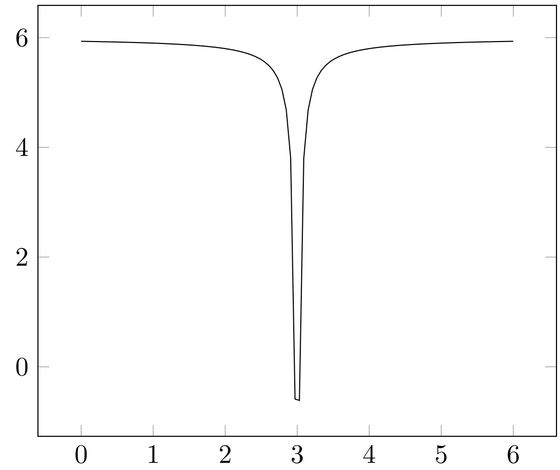
Folgenkompakt $\implies \exists$ konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, $x_{n_k} \to p \in D$.

$k \to \infty$. Dann konvergiert auch $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen p, d.h. $y_{n_k} \to p, k \to \infty$ (weil $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$
$\implies \epsilon_0 \leq |f(x_{n_k} - f(y_{n_k})| \to |f(p) - f(p)| = 0$. Widerspruch □

Definition 0.7 (Lipschitzstetigkeit)**.** Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt lipschitz stetig auf D, falls $\exists$ Konstante $L > 0$ (sog. Lipschitzkonstante), s.d.

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x, y \in D.$$

Beispiel 0.8. für $x = 3$ nicht lipschitzstetig.



Bemerkung 0.9. Lipschitzstetige Funktionen sind gleichmäßig stetig (stärker als gleichmäßige Stetigkeit)

0.2 Trigonometrische Funktionen

Satz 0.10. Für $x \in \mathbb{R}$ definiere $\cos(x) := \mathrm{Re}(e^{-x})$ und $\sin(x) := \mathrm{Im}(e^{ix})$. Dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}$.

1. $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ (Eulersche Formel)
2. $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$
   $\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$
3. $\cos(-x) = \cos(x)$
   $\sin(-x) = -\sin(x)$
4. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Beweis. trivial. □

Satz 0.11 (cos und sin sind stetig)**.** Restgliedabschätzung von $\exp(x)$ gilt auch für komplexe $z \in \mathbb{C}$

$$(|R_{n+1}(z)| \leq 2\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Damit folgt für eine Nullfolge in $\mathbb{C}$ ($z_n \to 0, n \to \infty, z_n \in \mathbb{C}$)
$\implies \exp(z_n) \to \exp(0) = 1, n \to \infty$

Mit Funktionalgleichung $\exp(x \cdot y) = \exp(x) + \exp(y)$ gilt für eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}, z_n \to a, n \to \infty$ in $\mathbb{C} \implies \exp(z_n) \to \exp(a)$. ($z_n - a \to 0, \exp(z_n - a) \to 1 \implies \lim_{n\to\infty}\exp(z_n) = \lim_{n\to\infty}(\exp(a)\cdot\exp(z_n - a)) = \exp(a)$)

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x_n \to a, x_n \in \mathbb{R}$. Dann $\exp(ix_n) \to \exp(ia)$ mit Re / Im ($\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(a)$, $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(a)$, $z_n \to a$ in $\mathbb{C}$.

$\implies \cos(x_n) \to \cos(a)$ und $\sin(x_n) \to \sin(a)$
$\implies$ Stetigkeit

Satz 0.12 (Additionstheoreme)**.** $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
   $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
2. $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
   $\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x - \frac{y}{2}}{}\right)$

Beweis. 1.

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i\sin(x+y) &= e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy} \\ &= (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) \\ &= \underbrace{\cos x\cos y - \sin x\sin y}_{\text{Re}} + i\underbrace{(\sin x\cos y + \cos x\sin y)}_{\text{Im}}.\end{aligned}$$

2. Setze $u := \frac{x+y}{2}, v := \frac{x-y}{2}$.
   $x = u + v, y = u - v$.

$$\begin{aligned}\sin x - \sin y &= \sin(u+v) - \sin(u-v) \\ &= \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v - (\sin u \underbrace{\cos(-v)}_{=\cos v} + \cos u \cdot \underbrace{\sin(-v)}_{-\sin v}) \\ &= 2\cos u \sin v = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}.\end{aligned}$$

$\square$