1 Grundlagen

Definition 1 (Positivität)**.** Sei $(K, +, \cdot, >)$ ein angeordneter Körper. $a \in K$ heißt positiv falls $a > 0$. $a \in K$ heißt negativ falls $a < 0$.

$$K^+ := \{a \in K \mid a > 0\}.$$
$$K^- := \{a \in K \mid a < 0\}.$$

Ordnungsrelation für $a, b \in K$

$$\begin{aligned} a < b &\iff b - a \in K^+ \\ b > a :&\iff a < b \\ a \leq b :&\iff a < b \wedge a = b \\ b \geq a :&\iff a \leq b \\ &. \end{aligned}$$

Für je zwei $a \in K, b \in K$ gilt genau eine der Relationen $a < b, a = b, a > b$.

Es gelten Regeln:

- $a < b, b < c \implies a < c$ Transitivität
- $a < b \implies a + c < b + c, c \in K$
- $a < b \implies a \cdot c < b \cdot c, c \in K^+$
- $a \geq b, b \geq a \iff a = b$
- $a < b, a > 0, b > 0 \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Beispiel 1 (Positivität auf $\mathbb{Q}$)**.**

$$\mathbb{Q}^+ := \left\{a \in Q \mid a = \frac{r}{s}, r, s \in \mathbb{N}\right\}.$$

Definition 2 (Absolutbetrag)**.** Sei $(K, +, \cdot, >$ ein angeordneter Körper Dann

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}.$$

Abbildung $|\cdot|$: $K \to K$ mit Eigenschaften:

- $|a| = 0 \iff a = 0$ (Definiertheit)
- $|ab| = |a||b|$ (Multiplikativität)
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis der Dreiecksungleichung. Beobachtung: $\pm a \leq |a| \implies a + b \leq |a| + |b| \implies -(a + b) \leq |a| + |b|$ □

Es folgt aus den Eigenschaften:

- $|a - b| = 0 \implies a = b$
- $|-a| = |a|$

- $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
- $||a| - |b|| \leq |a-b|$ (folgt aus: $|a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b|$ und $|b| = |b-a+a| \leq |b-a| + |a|$)

Satz 1 (Dezimalbruchdarstellung)**.** Jede rationale Zahl a besitzt eine endliche oder periodische Dezimalbruchdarstellung der Form:

$$a = \pm(a_0 + 0, d_1 \dots d_s) :\iff a = \pm\left(a_0 + \sum_{k=1}^{s} ds \cdot 10^{-k}\right).$$

bzw.

$$a = \pm(a_0 + 0, d_1 \dots d_s\overline{d_{s+1} \dots d_{s+t}}).$$

$a_0 \in N_0, d_1 \dots d_s \in \{0, 1, \dots, 9\}$ Ziffern

Umgekehrt stellt jede Dezimalbruchzerlegung dieser Art eine rationale Zahl dar.
Hier: bei periodischen Dezimalbrüchen ist die Periode $\overline{9}$ nicht zugelassen:

$$a_0, d_1 \dots d_{k-1}d_k\overline{9} := a_0 + 0, d_1 \dots d_k(d_k + 1), d_k < 9.$$

Beweis. Siehe Lehrbuch □

2 Die Reellen Zahlen

2.1 Von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen

Lemma 1 (Irrationalität der Quadratwurzel)**.** Die quadratische Gleichung $x^2 = 2$ besitzt keine rationale Lösung.

Beweis durch Widerspruch. Angenommen: Es existiert eine rationale Lösung

$$x := \sqrt{2} = \frac{r}{s}.$$

mit Zahlen $r \in \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{N}$.

O.B.d.A. (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit) nehmen wir an, dass r und s teilerfremd sind.

Dann gilt: $r \neq 0$ und $r^2 = 2s^2$ und $\frac{1}{2}r^2 = s^2$. Also muss r^2 und auch r gerade sein, denn $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ ungerade (Kontraposition). Damit sind auch $\frac{1}{2}r^2$ gerade und s^2 gerade.

Aber wegen Teilerfremdheit können r^2 und s^2 nicht beide durch zwei teilbar sein. $\Longrightarrow$ Widerspruch zur Annahme □

Bemerkung 1. Allgemeiner: „quadratische" Gleichung

$$a + bx + cx^2 = 0.$$

ist nicht für beliebig gewählte $a, b, c \in \mathbb{Q}$ durch ein $x \in \mathbb{Q}$ lösbar.

Bemerkung 2 (Beweisarten)**.** Direkter Beweeis:

$$E \implies E_1 \implies E_2 \implies \dots \implies E_k \implies V.$$

Indirekter Beweis: Zeigen E und $\neg V$ immer falsch. Da E immer wahr ist, muss $\neg V$ falsch sein. Da $\neg V$ falsch ist, dann ist V wahr.

Ziel: Konstruiere rationale Zahlen, welche die Gleichung $x^2 = 2$ mit zunehmender Genauigkeit erfüllen, z.B. rekursiv durch Einschließung mit Hilfe von Dezimalbrüchen.

Wir nutzen die Eigenschaft: $a, b > 0$ und $a^2 < b^2 \implies a < b$, folgt aus:

$$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a), (b + a > 0).$$

Start: $a_1 := 1,4$, $b_1 := 1,5$ mit $a_1 < b_1, a_1^2 = 1,96 < 2 < 2,25 = b_1^2$

2 Fälle:

Fall a) Es liege für ein $n \in \mathbb{N}$ eine Einschließung vor:

$$a_n = 1, d_1 d_2, \ldots d_{n-1} d_n < b_n = 1, d_1 d_2 \ldots d_{n-1}(d_{n+1}).$$
$$a_n^2 < 2 < b_n^2.$$

$d_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}, k = 1 \ldots n-1, dn \leq 8$

Die nächste Einschließung ist

$$a_{n+1} := 1, d_1 \ldots d_n, d_{n+1}, d_{n+1} \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

a_{n+1} möglichst groß aber $a_{n+1}^2 < 2$.

und

$$b_{n+1} := \begin{cases} 1, d_1, \ldots d_n(d_{n+1}+1) & \text{für } d_{n+1} \leq 8 \\ 1, d_1, \ldots (d_n+1)0 & frd_{n+1} = 9 \end{cases}.$$

Nach Konstruktion:

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n.$$
$$a_{n+1}^2 < 2 < b_{n+1}^2.$$

Fall b) Für ein $n \in \mathbb{N}$ liegt eine Einschließung vor

$$a_1 = 1, d_1 \ldots d_{n-1} d_n < b_n = 1, d_1 d_2 \ldots d_{n-1}(d_n+1)0 \ldots 0.$$
$$a_n^2 < 2 < b_n^2 \text{ mit } d_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}, k = 1, n = 1.$$
$$d_n \leq 8, d_{n+1} = \ldots = d_n = 9.$$

Die nächste Einschließung

$$a_{n+1} := 1, d_1 \ldots d_n, d_{n+1}, d_{n+1} \in 0, 1, \ldots, 9.$$

a_{n+1} möglichst groß, aber $a_{n+1}^2 < 2$.

$$b_{n+1} = \begin{cases} 1, d_1 \ldots d_n(d_{n+1}+1) & \text{für } d_{n+1} \leq 8 \\ 1, d_1 \ldots d_{m-1}(d_m+1)0 \ldots 0 & \text{für } d_{n+1} = 9 \end{cases}.$$

Der Fall b) kann nur endlich oft hintereinander auftreten, dann wäre $a_n = b_n$ ab einem gewissen n und folglich $a_n^2 = 2$

Nach Konstruktion:

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n.$$
$$a_{n+1}^2 < 2 < b_{n+1}^2.$$

Wir erhalten 2 Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in N}$ mit den Eigenschaften

$$1,4 = a_1 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq \ldots b_1 = 1,5.$$

Konkret: $a_1 = 1,4$, $a_2 = 1,41$, $a_3 = 1,414$ $b_1 = 1,5$, $b_2 = 1,42$, $b_3 = 1,415$

Abstand $b_n - a_n \leq 10^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ wird immer kleiner $\Longrightarrow$ wir sollen die Zahl $\sqrt{2}$ eventuell erfassen!

Definition 3 (Zahlenfolge)**.** Eine Menge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nummerierter rationaler Zahlen wird „Folge" genannt.

Beispiel 2. $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

$a_1 = 2$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{5}{4}$

Offenbar, $1 + \frac{1}{n} \to 1, n \to \infty$ bzw.

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1.$$

d.h. Folge konvergiert gegen 1

Definition 4 (Konvergenz)**.** Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent, gegen einen „Limes" a, wenn gilt:

$$|a_n - a| \to 0, n \to \infty.$$

Falls $|a_n|$, $n \to \infty$ heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt divergent.

Präziser (Cauchy)

Eine Folge $(a_n)_{n\in N}$ ist „konvergent" gegen einen Grenzwert a, wenn:

$$\forall\epsilon > 0 : \exists n := n(\epsilon) = n_\epsilon.$$

sodass

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ für } n \geq n_\epsilon.$$