Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. (a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^x \cos(y) + \ln(1+y^2)$. Dann gilt

$$\nabla f = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) \\ -e^x \sin(y) + \frac{2y}{1+y^2} \end{pmatrix}.$$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Beh.: f überall zweimal partiell differenzierbar, aber

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}.$$

Beweis. Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}\right) \\ &= \frac{yx^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}\right) \\ &= \frac{x^5 - 4y^2x^3 - y^4x}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Diese partiellen Ableitungen sind als Quotient von Polynomen mit $(x^2+y^2)^2 \neq 0$ wieder partiell differenzierbar.

f ist im Punkt $(0,0)$ partiell differenzierbar, denn

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+(h,0)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(h,0)}^{=0}}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(0,h)}^{=0}}{h} = 0. \end{aligned}$$

Für die zweiten partiellen Ableitungen in $(0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)}{h} = \frac{h^5}{hh^4} = 1 \\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,h)}{h} = -\frac{h^5}{hh^4} = -1 \\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Also existieren die zweiten partiellen Ableitungen auf ganz $\mathbb{R}^2$, aber es gilt

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}.$$

$\square$

Beh.: Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}$ ist unstetig in $(0,0)$.

Beweis. Es gilt für $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3}.$$

Mit $(x,y)_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ gilt $(x,y)_n \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$, aber

$$\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x,y)_n = \frac{\frac{1}{n^6} + \frac{9}{n^6} - \frac{9}{n^6} - \frac{1}{n^6}}{\frac{8}{n^6}} = 0 \neq 1 = \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(0,0).$$

□

Der Satz von Schwarz für ein $x \in D$ gilt nur, wenn f 2-mal stetig partiell differenzierbar ist in x, dies ist hier für $x = (0,0)$ nicht der Fall.

Aufgabe 2. (a) $f\colon R^2 \to R$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Beh.: f ist im Punkt $(x,y) = (0,0)$ nicht total differenzierbar.

Beweis. Mit dem Hinweis g.z.z., dass f in $(0,0)$ nicht stetig ist. Mit $(x,y)_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)$ gilt $(x,y)_n \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$ aber, es ist

$$f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

Also f unstetig in $(0,0)$. □

Beh.: f besitzt Richtungsableitungen in alle Richtungen in $(x,y) = (0,0)$.

Beweis. Sei $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\|_2 = 1$ beliebig. Dann sei $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \searrow 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{f(tv)}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{v_x v_y^2}{v_x^2 + \frac{1}{t^2} v_y^4} = \begin{cases} 0 & v_x = 0 \\ \frac{v_y^2}{v_x} & v_x \neq 0 \end{cases}.$$

Also existieren alle Richtungsableitungen in $(x,y) = (0,0)$. □

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Beh.: $Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T$, also f im Punkt $(x,y) = (0,0)$ total differenzierbar.

Beweis. Sei $h \in \mathbb{R}^2$ mit $h \neq 0$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{f((0,0)+h) - f(0,0) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot h}{\|h\|_2} \right| &= \left| \frac{f(h)}{\|h\|_2} \right| \\ &= \frac{\|h\|_2^2 \sin\left(\frac{1}{\|h\|_2}\right)}{\|h\|_2} \\ &= \left| \|h\|_2 \sin\left(\frac{1}{\|h\|_2}\right) \right| \\ &\leq \|h\|_2 \xrightarrow{h\to 0} 0. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h) - f(0,0) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} h}{\|h\|_2} = 0.$$

Also f total differenzierbar in $(x,y) = (0,0)$ mit Differential $Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

Beh.: $\frac{\partial f}{\partial x}$ nicht stetig in $(x,y) = (0,0)$.

Beweis. Mit der (a) folgt, dass $J_f(0,0) = Df(0,0)$, also insbesondere $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Für $(x,y) \neq (0,0)$ folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Mit $(x,y)_n = \left(\frac{1}{2\pi n}, 0\right)$ gilt $x_n \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$, aber

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2\pi n}, 0\right) = \frac{1}{\pi n} \underbrace{\sin(2\pi n)}_{=0} - \cos(2\pi n) = -1 \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0).$$

□

Aufgabe 3. Sei $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2)^T \mid x_2 \leq 0 \text{ oder } x_1 x_2 = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \ln(x_2) \\ \tan(x_1, x_2) \end{pmatrix}, \quad g(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} y_1^2 \\ y_2^2 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $h = g \circ f\colon D \to \mathbb{R}^2$.

$D_h(x)$ ohne Kettenregel:

$$h(x) = g(f(x)) = \begin{pmatrix} x_1^2 \ln^2(x_2) \\ \tan^2(x_1 x_2) \end{pmatrix}.$$

Damit folgt direkt

$$D_h(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \ln^2(x_2) & 2\frac{x_1^2}{x_2}\ln(x_2) \\ \frac{2x_2 \tan(x_1x_2)}{\cos^2(x_1x_2)} & \frac{2x_1\tan(x_1x_2)}{\cos^2(x_1x_2)} \end{pmatrix}.$$

Mit Kettenregel ist zunächst

$$D_g(y) = \begin{pmatrix} 2y_1 & 0 \\ 0 & 2y_2 \end{pmatrix}, \quad D_f(x) = \begin{pmatrix} \ln(x_2) & \frac{x_1}{x_2} \\ \frac{x_2}{\cos^2(x_1x_2)} & 2\frac{x_1 y_2}{\cos^2(x_1x_2)} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} D_h(x) &= D_g(f(x)) D_f(x) \\ &= \begin{pmatrix} 2x_1\ln(x_2) & 0 \\ 0 & 2\tan(x_1x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(x_2) & \frac{x_1}{x_2} \\ \frac{x_2}{\cos^2(x_1x_2)} & 2\frac{x_1 y_2}{\cos^2(x_1x_2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_1 \ln^2(x_2) & 2\frac{x_1^2}{x_2}\ln(x_2) \\ \frac{2x_2 \tan(x_1x_2)}{\cos^2(x_1x_2)} & \frac{2x_1\tan(x_1x_2)}{\cos^2(x_1x_2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das Einsetzen von $x_0 = (1, e)^T \in D$ ist dem Lesenden als Aufgabe überlassen.

Aufgabe 4. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}.$$

Weiter seien $a = 0$ und $b = 2\pi$.

Beh.: Es ex. kein $\xi \in (a,b)$ mit $f(b) - f(a) = D_f(\xi)(b-a)$.

Beweis. Es ist zunächst

$$D_f(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}.$$

Da $\sin(x)$ und $\cos(x)$ keine gemeinsamen Nullstellen in $\mathbb{R}$ besitzen, folgt $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$D_f(x) \neq 0.$$

Damit folgt direkt $\forall \xi \in (a,b)$:

$$f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi) \\ \sin(2\pi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \neq 2\pi \begin{pmatrix} -\sin(\xi) \\ \cos(\xi) \end{pmatrix} = D_f(\xi).$$

□