Aufgabe	A16	A17	$\sum$
Punkte			

Aufgabe 16. Seien L und K Teilkörper mit $K \subseteq L$.

a) (i) Beh.: Für $f, g \in K[t]$ gilt $\text{ggT}_{L[t]}(f,g) = \text{ggT}_{K[t]}(f,g)$.

Beweis. Seien $f, g \in K[t]$. Der euklid. Algorithmus in $K[t]$ liefert $a_2, \ldots, a_k \in K[t]$ mit $a_k \in \text{GGT}_{K[t]}(f,g)$. Da K Teilkörper von L ist, ist $K[t]$ Unterring von $L[t]$. Das heißt, der euklid. Algorithmus kann in $L[t]$ mit den selben $a_2, \ldots a_k$ ausgeführt werden. Damit folgt $a_k \in \text{GGT}_{L[t]}(f,g)$.
Definiere $d \in K[t]$, als das normierte Polynom von a_k. Wegen der Eindeutigkeit des größten gemeinsamen Teilers in $L[t]$ und $K[t]$ folgt damit

$$\text{ggT}_{L[t]}(f,g) = d = \text{ggT}_{K[t]}(f,g).$$

$\square$

(ii) Beh.: Für $A, B \in M_{n,n}(K)$ so gilt

$$A \approx B \text{ in } M_{n,n}(K) \iff A \approx B \text{ in } M_{n,n}(L).$$

Beweis. Seien A, B in $M_{n,n}(K)$. „$\implies$" ist trivial.
„$\impliedby$": Sei $A \approx B$ in $M_{n,n}(L)$. Da $P_A \in M_{n,n}(K[t])$ folgt

$$\begin{aligned} d_{l_{L[t]}}(A) &= \text{ggT}_{L[t]}\{\underbrace{\det(C)}_{\in K[t]} \mid C \text{ ist } l \times l \text{ Untermatrix von } P_A\} \\ &\overset{(i)}{=} \text{ggT}_{K[t]}\{\det(C) \mid C \text{ ist } l \times l \text{ Untermatrix von } P_A\} \\ &= d_{l_{K[t]}}(A). \end{aligned}$$

Analog für B. Wegen $A \approx B$ in $M_{n,n}(L)$ gilt $\forall l = 1, \ldots, n$:

$$d_{l_{K[t]}}(A) = d_{l_{L[t]}}(A) = d_{l_{L[t]}}(B) = d_{l_{K[t]}}(B).$$

Damit folgt $A \approx B$ in $M_{n,n}(K)$. $\square$

b) Beh.: Für $A \in M_{n,n}(K)$ ist $A \approx A^T$.

Beweis. Es ist $Fit_l(P_A) = Fit_l((P_A)^T)$ $\forall l = 1, \ldots, n$. Also $P_A \sim (P_A)^T$. Wegen $(P_A)^T = (tE_n - A)^T = tE_n - A^T = P_{A^T}$ folgt $P_A \sim P_{A^T}$. Damit folgt mit dem Satz von Frobenius: $A \approx A^T$. $\square$

Aufgabe 17. (a) Kurze Rechung ergibt

$$P_A = \begin{pmatrix} t-10 & 11 & 11 & 32 \\ 1 & t & 2 & -4 \\ -1 & 1 & t-1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & t+6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & t & 2 & -4 \\ t-10 & 11 & 11 & 32 \\ -1 & 1 & t-1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & t+6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11-t^2+10t & -8+4t & \\ 0 & t+1 & t+1 & 0 \\ 0 & 2+2t & 6 & t-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2+2t & t-2 \\ 0 & t+1 & t+1 & 0 \\ 0 & 31-2t & 11-t^2+10t & -8+4t \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \frac{1}{6} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}+\frac{1}{3}t & \frac{1}{6}t-\frac{1}{3} \\ 0 & t+1 & t+1 & 0 \\ 0 & 31-2t & 11-t^2+10t & -8+4t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} E_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}t^2+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t & -\frac{1}{6}t^2+\frac{1}{6}t+\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3}+\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}t^2 & \frac{1}{3}t^2-\frac{11}{6}t+\frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} E_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}t^2+\frac{1}{3}t+\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}t^2-2t+2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot (-3) \\ \mid \cdot 2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} E_2 & 0 & 0 \\ 0 & (t+1)(t-2) & 0 \\ 0 & 0 & (t-2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} E_2 & 0 & 0 \\ 0 & (t+1)(t-2) & -(t+1)(t-2) \\ 0 & (t+1)(t-2) & -3t+6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} E_2 & 0 & 0 \\ 0 & -3t+6 & (t-2)(t+1) \\ 0 & -(t-2)(t+1) & (t-2)(t+1) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} E_2 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & -(t-2)(t+1) \\ 0 & -(t-2)(t+1) & 3(t-2)(t+1) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} E_2 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & (t-2)^2(t+1) \end{pmatrix}.$$

Damit folgen als Invariantenteiler: $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = t-2$ und $c_4 = (t-2)^2(t+1)$. Die Determinantenteiler sind damit $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $d_3 = t-2$ und $d_4 = (t-2)^3(t+1)$.

(b) Hier ist sofort ersichtlich:

$$\det(P_B) = \begin{vmatrix} t+5 & 3 & -5 \\ 0 & t-1 & 1 \\ 8 & 4 & t-7 \end{vmatrix} = (t-1)^3 \neq (t-2)(t-1)(t+1) = \begin{vmatrix} t+3 & -8 & -12 \\ -1 & t+2 & 3 \\ 2 & -4 & t-7 \end{vmatrix} = \det(P_C).$$

Damit ist $d_{3B} \neq d_{3C}$, also sind nach Invariantenteilersatz B und C nicht ähnlich.