Aufgabe	A2	A3	$\sum$
Punkte			

Aufgabe 2. a) Falls $l_0 \leq 0$: In beiden Fällen findet keine Bewegung statt. Sei also $l_0 > 0$. Die verallgemeinerte Koordinate sei $l > 0$, der Abstand des untersten Massepunkts von der Tischkante. Damit ist $l(0) = l_0$.

(i) Zunächst gilt, wegen $m_{\text{ges}} = 2m$:

$$T = m\dot{l}^2.$$

Die potentielle Energie ist abhängig von l:

$$V = \begin{cases} -mgl & l \leq L \\ -mgl - mg(l-L) & l > L \end{cases}.$$

Damit folgt

$$\mathcal{L} = T - V = \begin{cases} m\dot{l}^2 + mgl & l \leq L \\ m\dot{l}^2 + 2mgl & l > L \end{cases}.$$

(ii) Für die kinetische Energie gilt

$$T = \frac{M}{2}\dot{l}^2.$$

Da die potentielle Energie mit der Länge der überhängenden Kette steigt, folgt für $l \leq L$:

$$V = -g\int_0^l \frac{\mathrm{d}h}{L} Mh = -\frac{Mg}{2L}l^2$$

Für $l > L$ muss die Kette durch die Länge L begrenzt werden, damit folgt

$$V = -g\int_{l-L}^l \frac{M}{L} gh \,\mathrm{d}h = -Mg\left(l - \frac{L}{2}\right).$$

Insgesamt folgt damit:

$$\mathcal{L} = T - V = \begin{cases} \frac{M}{2}\dot{l}^2 + \frac{Mg}{2L}l^2 & l \leq L \\ \frac{M}{2}\dot{l}^2 + Mg\left(l - \frac{L}{2}\right) & l > L \end{cases}.$$

b) Mit den Langrange Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0.$$

folgt

(i) Mit $l(0) = l_0$ und $v_0 = 0$ folgt für $l \leq L$:

$$2m\ddot{l} - mg = 0 \implies l(t) = \frac{1}{4}gt^2 + l_0.$$

Für $l > L$ folgt mit $t_e := \sqrt{\frac{4}{g}(L - l_0)}$ und $v_e := \dot{l}(t_e)$:

$$2m\ddot{l} - 2mg = 0 \implies l(t - t_e) = \frac{1}{2}gt^2 + v_e t + L.$$

(ii) Für $l \leq L$ folgt

$$M\ddot{l} - \frac{Mg}{L}l = 0$$

Mit $w^2 := \frac{g}{L}$ folgt

$$l_{1,2}(t) = e^{\pm\omega t}$$
$$l(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

Aus den Anfangsbedingungen $l(0) = l_0$ und $v_0 = 0$ folgt

$$l(t) = \frac{l_0}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right).$$

Für $l > L$ folgt für $t \geq t_e$ analog zu (i) eine freie Fallbewegung:

$$l(t - t_e) = \frac{1}{2}gt^2 + v_e t + L.$$

c) Mit $E = T + V$ folgt jeweils für $l \leq L$:

(i)

$$E = m\dot{l}^2 - mgl = mg\left(\frac{1}{4}gt^2 - \frac{1}{4}gt^2 - l_0\right) = -mgl_0$$
$$\implies \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0.$$

(ii)

$$\begin{aligned} E &= \frac{M}{2}\frac{l_0^2}{4}\omega^2\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)^2 - \frac{Mg}{2L}\frac{l_0^2}{4}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right)^2 \\ &= \frac{M}{2}\frac{l_0^2}{4}\left(\omega^2\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)^2 - \omega^2\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right)^2\right) \\ &= -\frac{M}{2}l_0^2\omega^2 \\ \implies \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= 0. \end{aligned}$$

Für $l > L$ liegt eine freie Fallbewegung vor, hier ist die Energie offensichtlich erhalten. Analoge Rechnung zu (i).

Aufgabe 3 (Verständnisfragen). a) Verallgemeinerte Kräfte sind das Analogon zum Übergang von kartesischen Koordinaten zu verallgemeinerten Koordinaten. Sie haben jetzt genau f Komponenten und haben, genauso wie die verallgemeinerten Koordinaten, nicht mehr die Einheit einer Kraft.

$$Q_j = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}.$$

b) Die Lagrange-Gleichungen 2. Art sind eine Neuformulierung des 2. Newton'schen Axioms, wobei die kartesischen Koordinaten aufgegeben werden und anstatt dessen verallgemeinerte Koordinaten eingesetzt werden, die automatisch alle Zwangsbedingungen erfüllen. Das 2. Newton'sche Axiom wird damit durch die Zwangsbedingungen eingeschränkt, indem der $3N$-Konfigurationsraum auf die f dimensionale Untermannigfaltigkeit eingeschränkt wird.

c) Der verallgemeinerte Impuls, bzw. der kanonisch konjugierte Impuls ist das Analogon zu den verallgemeinerten Koordinaten. Er hat nicht zwingend die Einheit eines Impulses und ist definiert, als die partielle Ableitung der Lagrange Funktion nach $\dot{q}_i$:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Im Fall des freien Massenpunkts in kartesischen Koordinaten, geht er in den klassischen Impuls über.