Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. a) Die potentielle Energie ist gegeben als mgz, mit $z = R\cos\vartheta$ folgt also $mgR\cos\vartheta$. Im mitrotierten Bezugssystem (gestrichene Koordinaten) ist

$$\vec{x}' = R\begin{pmatrix}\sin\vartheta \\ 0 \\ \cos\vartheta\end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich im Laborsystem mit einer Drehmatrix S

$$\vec{x} = S\vec{x}'.$$

Die Geschwindigkeit ist damit gegeben als

$$\dot{\vec{x}}' = S\left(\dot{\vec{x}}' + \vec{\omega} \times \vec{x}'\right).$$

Also folgt mit $\vec{w} = \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ \omega\end{pmatrix}$ und wegen $S^TS = \mathbb{1}_3$:

$$\dot{\vec{x}}^2 = R^2(\dot{\vartheta}^2 + \omega^2\sin^2\vartheta).$$

Damit folgt die Lagrangefunktion.

b) Für den kanonisch konjugierten Impuls gilt

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} = MR^2\dot{\vartheta} =: p_\vartheta$$

Damit folgt die Hamilton Funktion

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_\vartheta^2}{mR^2} - L \\ &= \frac{p_\vartheta^2}{mR^2} - \frac{1}{2}mR^2(\dot{\vartheta}^2 + \omega^2\sin^2\vartheta) + mgR\cos\vartheta \\ &= \frac{p_\vartheta^2}{2mR^2} - \frac{1}{2}R^2\omega^2\sin^2\vartheta + mgR\cos\vartheta. \end{aligned}$$

c) Es liegt hier zwar ein Potential vor, allerdings ist die kinetische Energie des Systems gegeben als

$$T = \frac{m}{2}R^2(\dot{\vartheta}^2 + \omega^2\sin^2\vartheta).$$

Diese ist nicht homogen vom Grad 2 in $\dot{\vartheta}$, also ist die Hamiltonfunktion nicht gleich der Gesamtenergie. Das liegt an der zeitabhängigen Zwangsbedingung.

Wegen $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ ist die Hamilton Funktion zeitlich erhalten. Da die Zwangskräfte von der Zeit abhängen, ist das System nicht invariant gegenüber Zeittranslation, also ist die Energie nicht erhalten.

d) Für die kanonischen Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta} &= \frac{2p_\vartheta}{mR^2} - \frac{p_\vartheta}{mR^2} = \frac{p_\vartheta}{mR^2} = \dot{\vartheta} \\ \frac{\partial H}{\partial\vartheta} &= mR^2\omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta + mgR\sin\vartheta = mR\sin\vartheta(R\omega^2\cos\vartheta + g) = \dot{p}_\vartheta. \end{aligned}$$

e) Für stationäre Lösungen gilt $\dot{\vartheta} = 0$, also $p_\vartheta = 0$, damit folgt

$$mR\sin\vartheta(R\omega^2\cos\vartheta + g) = 0.$$

Als stationäre Lösungen folgen damit $\vartheta_1 = 0$ und $\vartheta_2 = \pi$, denn dann ist $\sin\vartheta = 0$. Für $\vartheta_3 = \frac{\pi}{2}$, folgt $mRg = 0$, dies ist also nur möglich, falls Masse oder Radius 0 sind.

Für $R \neq 0$, $m \neq 0$, $\sin\vartheta \neq 0$ und $\omega \neq 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sin\vartheta}_{\neq 0}(R\omega^2\cos\vartheta + g) &= 0 \\
\implies R\omega^2\cos\vartheta + g &= 0 \\
\implies \vartheta &= \arccos\left(-\frac{g}{R\omega^2}\right).
\end{aligned}$$

Wie zu erwarten ist $\vartheta \xrightarrow{\omega\to\infty} \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 2. a) Für Lagrange- und Hamiltonfunktion ist

$$\begin{aligned}
L = T - V &= \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m}{2}\omega^2 q^2 = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2) \\
H = \dot{q}p - L &= \frac{p^2}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{p^2}{m^2} - \omega^2 q^2\right).
\end{aligned}$$

b) Die kanonischen Gleichungen sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial p} &= \frac{p}{m} = \dot{q} \\
\frac{\partial H}{\partial q} &= m\omega^2 q = -\dot{p}
\end{aligned}$$

In Matrixschreibweise folgt also

$$\dot{\vec{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

Als Lösung folgt

$$\begin{aligned}
\vec{y} &= e^{At}\vec{y_0} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}\vec{y_0}
\end{aligned}$$

Mit $A^{2k} = (-1)^k \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}^{2k}$ und $A^{2k+1} = A^{2k} \cdot A = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\omega m} \\ -m\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}^{2k+1}$ folgt

$$\begin{aligned}
\vec{y} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(\omega t \mathbb{1}_2)^{2k}}{(2k)!} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\omega m} \\ -m\omega & 0 \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(\omega t \mathbb{1}_2)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\vec{y_0} \\
&= \left(\cos(\omega t) + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\omega m} \\ -m\omega & 0 \end{pmatrix}\sin(\omega t)\right)\vec{y_0}
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
q &= q_0\cos(\omega t) + \frac{p_0}{\omega m}\sin(\omega t) \\
p &= p_0\cos(\omega t) - m\omega q_0\sin(\omega t).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. a) Ansatz: $q(r,t) = R(r)T(t)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - v^2\Delta_{(n)} q &= 0 \\
\implies R\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} - v^2 T\Delta_{(n)} R &= 0 \\
\implies \frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} = \text{konst.} &= \frac{v^2}{R}\Delta_{(n)} R =: -c.
\end{aligned}$$

Damit folgt für T:

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}+cT=0.$$

Für $n=2$ gilt für R:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\underbrace{\frac{\partial^2 R}{\partial\varphi^2}}_{=0}+\frac{c}{v^2}R=0$$

$$\implies\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{c}{v^2}R=0.$$

Für $n=3$ folgt analog

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{c}{v^2}R=0.$$

b) Sei $c>0$ und $\omega^2=c$. Ansatz: $R(r)=\frac{\tilde{R}(r)}{r}$. Aus der DGL für R folgt

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{r\frac{\partial\tilde{R}}{\partial r}-\tilde{R}}{r^2}\right)+\frac{\omega^2}{v^2}\frac{\tilde{R}}{r}=0$$

$$\implies\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2\tilde{R}}{\partial r}+\frac{\omega^2}{v^2}\tilde{R}\right)=0$$

$$\implies\frac{\partial^2\tilde{R}}{\partial r^2}+\frac{\omega^2}{v^2}\tilde{R}=0$$

$$\implies\tilde{R}=A\sin\left(\frac{\omega}{v}r\right)+B\cos\left(\frac{\omega}{v}r\right)$$

$$\implies R=\frac{A\sin\left(\frac{\omega}{v}r\right)+B\cos\left(\frac{\omega}{v}r\right)}{r}$$

Mit der Vorraussetzung R bei $r=0$ stetig folgt $B=0$:

$$R=\frac{A}{r}\sin\left(\frac{\omega}{v}r\right).$$

Damit folgt

$$q=T\cdot R=\frac{A_0}{r}\cos(\omega t-\delta)\sin\left(\frac{\omega}{v}r\right).$$

Aufgabe 4 (Verständnisfragen). a) Die Hamilton-Funktion ist definiert als

$$H(q,p)=\dot{q}_ip_i-L.$$

und ist, falls die Kräfte Potentialkräfte sind und nur zeitunabhängige Zwangsbedingungen vorliegen, gleich der Gesamtenergie des Systems.

Die kanonischen Gleichungen sind DGL 1. Ordnung, die die Bewegung des Systems im Phasenraum beschreiben.

b) Wenn von N-Massepunkten zu einem kontinuierlichen System übergegangen wird, geht die Lagrange-Funktion in ein räumliches Integral über eine Lagrange-Dichte über.

$$L\to L(q,\dot{q})=\int_0^l\text{Lagrange-Dichte}\,\mathrm{d}x\,.$$

Die Wirkung ist das Zeitintegral über eine Lagrangefunktion.

c) Die d'Alembertsche Gleichung ist eine homogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. „Zweite Zeitableitung − charakteristische Geschwindigkeit zum Quadrat mal zweite Ortsableitung gleich 0“.

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^N v^2\frac{\partial^2 q}{\partial x_i^2}=0.$$

Allgemein ist die Lösung für zwei beliebige, zweifach differenzierbare Funktionen g und h gegeben als

$$q(x,t)=g(x+vt)+h(x-vt),$$

also eine Überlagerung zweier Wellen, wobei g rück- und h vorläufig ist. D.h. die Funktionen müssen sich jeweils mit der charakteristischen Geschwindigkeit verschieben.