

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	Σ
Punkte						

Aufgabe 1. Für $k \in \mathbb{N}$ ist

$$f_k(x) := \begin{cases} x^k \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

definiert.

(a) Beh.: f_1 ist in $x_0 = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar.

Beweis. Da $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ beschränkt durch ± 1 , gilt $\forall x \in \mathbb{R}^\times$

$$\left| x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|.$$

Sei $\epsilon > 0$ bel., dann wähle $\delta := \epsilon$. Dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}^\times$ mit $|x| < \delta$:

$$|f_1(0) - f_1(x)| = \left| x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| < \delta = \epsilon.$$

$\implies f_1$ in $x_0 = 0$ stetig.

Weiter gilt für $x_0 = 0$

$$D_h f_1(0) = \frac{f_1(0+h) - f_1(0)}{h} = \frac{h \cdot \sin(1/h)}{h} = \sin\left(\frac{1}{h}\right).$$

Nun sind offensichtlich $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $h_n := \frac{1}{2\pi n}$ und $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $l_n := \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ Nullfolgen, aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_{h_n} f_1(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2\pi n) = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_{l_n} f_1(0).$$

$\implies f_1$ in x_0 nicht differenzierbar. □

(b) Beh.: f_2 in $x_0 = 0$ differenzierbar, aber f'_2 in $x_0 = 0$ nicht stetig.

Beweis. Es gilt

$$D_h f_2(x_0) = \frac{f_2(h)}{h} = \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = h \cdot \sin(1/h).$$

$\implies$ Analog zum Stetigkeitsbeweis in (a), folgt f_2 in x_0 differenzierbar.

$\implies \lim_{h \rightarrow 0} D_h f_2(x) = 0 = f'_2(0)$.

Für $x \neq 0$ folgt mit Ableitungsregeln direkt:

$$f'_2(x) = 2x \cdot \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n := \frac{1}{2\pi n}$ folgt direkt $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = x_0$, aber

$$f'_2(x_n) = 2 \cdot \frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n) - \cos(2\pi n) = -1 \neq 0 = f'_2(0).$$

$\implies f'_2$ nicht stetig in $x_0 = 0$. □

(c) Beh.: f_3 in $x_0 = 0$ nur einmal differenzierbar. in $x_0 = 0$.

Beweis. Für $x_0 = 0$ folgt direkt

$$D_h f_3(x_0) = \frac{f_3(h)}{h} = \frac{h^3 \cdot \sin(1/h)}{h} = h^2 \cdot \sin(1/h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Für $x \neq 0$ gilt mit Ableitungsregeln direkt:

$$f'_3(x) = 3x^2 \cdot \sin(1/x) - x \cdot \cos(1/h).$$

Damit folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'_3(x) = 0 = f'(0).$$

$\Rightarrow f'_3$ in $x_0 = 0$ stetig. Aber wegen

$$D_h f'_3(0) = \frac{3h^2 \sin(1/h) - h \cos(1/h)}{h} = 3h \sin(1/h) - \cos(1/h).$$

$\Rightarrow f'_3$ in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, analog zu (a). □

Aufgabe 2. Sei $f: R_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$.

(a) Beh.: $f^{(k)}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \prod_{n=0}^{k-1} (2n-1) \cdot x^{\frac{1}{2}-k}$

Beweis. durch vollständige Induktion nach k .

I.A.: $k = 0$

$$f^{(0)}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^0 \cdot x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} = f(x).$$

I.S.: $k \rightarrow k+1$. Es ex. ein festes, aber bel. $k \in \mathbb{N}$, für das die Beh. gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= f^{(k)'}(x) \stackrel{\text{I.V.}}{=} \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^k \prod_{n=0}^{k-1} (2n-1) \cdot x^{\frac{1}{2}-k} \right)'(x) \\ &\stackrel{\text{Potenzregel}}{=} \left(\frac{1}{2} - k\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^k \prod_{n=0}^{k-1} (2n-1) \cdot x^{\frac{1}{2}-k-1} \\ &= -\frac{1}{2} (2k-1) \left(-\frac{1}{2}\right)^k \prod_{n=0}^{k-1} (2n-1) \cdot x^{\frac{1}{2}-(k+1)} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} \prod_{n=0}^k (2n-1) \cdot x^{\frac{1}{2}-(k+1)}. \end{aligned}$$

□

(b) Mit (**) folgt dann direkt aus (a)

$$f^{(k)}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)} \cdot x^{\frac{1}{2}-k}.$$

(c) Aus (a) und (b) folgt damit direkt

$$\begin{aligned} T_\infty(x, x_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right) k!} \cdot x_0^{\frac{1}{2}-k} (x - x_0)^k \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_0^{\frac{1}{2}-k}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right) k!} (x - x_0)^k. \end{aligned}$$

(d) Zunächst folgt aus (ii) direkt

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right) &\stackrel{\text{(ii)}}{=} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(k+1-\frac{3}{2}\right)} \\ &\stackrel{\text{(iii)}}{=} (-1)^{k-1} \frac{\pi}{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right) = (-1)^{k-1} \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)}$$

Eingesetzt in (i) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2^{k-1}} \prod_{n=0}^{k-1} (2n-1) &= (-1)^{k-1} \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right) \sqrt{\pi}} \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \prod_{n=0}^{k-1} (2n-1) &= (-1)^k \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)} \\ \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^k \prod_{n=0}^{k-1} (2n-1) &= (-1)^k \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. (a) Mit $A := (e^{3x} - 5x)^{\frac{1}{x}}$ folgt

$$\ln A = \frac{1}{x} \cdot \ln(e^{3x} - 5x).$$

Damit folgt

$$\frac{\ln(e^{3x} - 5x)'}{x'} = \frac{1}{e^{3x} - 5x} (3e^{3x} - 5) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -2.$$

Mit de l'Hospital folgt damit

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} - 5x)^{\frac{1}{x}} = e^{-2}.$$

(b) Analog zu (a) mit

$$\frac{\ln(e^{3x} - 5x)'}{x'} = \frac{1}{e^{3x} - 5x} (3e^{3x} - 5) = \frac{3 - \frac{5}{e^{3x}}}{1 - 5\frac{x}{e^{3x}}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 3.$$

Damit folgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{3x} - 5x)^{\frac{1}{x}} = e^3.$$

(c) Hier folgt direkt

$$\frac{(5^x - 2^x)'}{x'} = \frac{\ln(5) \cdot 5^x - \ln(2) 2^x}{1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln(5) - \ln(2) \stackrel{\text{de l'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 2^x}{x}.$$

(d) Abl. bedeutet hier, Zähler und Nenner separat abgeleitet.

$$\frac{x - \sin(x)}{x^2} \xrightarrow{\text{Abl.}} \frac{1 - \cos(x)}{2x} \xrightarrow{\text{Abl.}} \frac{\sin(x)}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

$$\text{de l'Hospital: } \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} \right) = 0.$$

(e)

$$\frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2} \xrightarrow{\text{Abl.}} \frac{\frac{1}{1+x} - \cos x}{2x} \xrightarrow{\text{Abl.}} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} + \sin x}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}.$$

$$\text{de l'Hospital: } \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

(f) Mit $y := \frac{1}{x}$ und $A := (1+y)^{\frac{1}{y}}$, folgt

$$\ln A = \frac{\ln(1+y)}{y} \xrightarrow{\text{Abl.}} \frac{1}{1+y} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0.$$

Damit folgt mit de l'Hospital $\lim_{y \rightarrow \infty} A = 1$. Insgesamt ergibt sich damit

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \cdot (1+y)^{\frac{1}{y}} - \frac{e}{y} = 0.$$

Aufgabe 4. (a) Die Funktion ist konvex, d.h. die Bedingung $r'(m) = 0$ reicht bereits aus. Damit folgt

$$0 \stackrel{!}{=} r'(m) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N 2(y_i - mx_i - b^*)$$

$$\implies m^* = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - b^* \sum_{i=1}^N x_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}.$$

Mit $\xi := \sum_{i=1}^N x_i y_i$ und $\zeta := \sum_{i=1}^N x_i^2$ folgt

$$m^* = \frac{\xi - b^* N \bar{x}}{\zeta}.$$

Mit $b^* = \bar{y} - m^* \bar{x}$ folgt

$$m^* = \frac{\xi - N(\bar{y} - m^* \bar{x}) \bar{x}}{\zeta}$$

$$\implies m^* = \frac{\xi - N \bar{x} \bar{y}}{\zeta - N \bar{x}^2}.$$

(b) Mit $f(x) = m^* x + b^*$ und der in (a) gezeigten Formel folgt mit dem Ansatz $f(x) = 0$, dass ab dem 32. Zettel niemand mehr abgibt.

Aufgabe 5. (a) Beh.: $f_n(x) := \sin\left(\frac{1}{n}x\right)$, $x \in [-\pi, \pi]$ ist gleichmäßig konvergent mit $f(x) = 0$.

Beweis. Der $\sin(\tau)$ hat auf $\tau \in [-\pi, \pi]$ genau zwei Extrema bei $\tau_1 = \frac{\pi}{2}$ und $\tau_2 = -\frac{\pi}{2}$. Für $n > 2$ gilt: $\left|\frac{1}{n} \cdot \pi\right| < \frac{\pi}{2}$. Damit folgt $\forall x \in [-\pi, \pi]: \sin\left(\frac{1}{n}x\right) \leq \sin\left(\frac{1}{n}\pi\right)$.

Sei nun $\epsilon > 0$ bel. Dann wähle $n_\epsilon := \left\lceil \frac{\pi}{\arcsin(\epsilon)} \right\rceil > 2$. Dann folgt $\forall x \in [-\pi, \pi]$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\epsilon$:

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \left| \sin\left(\frac{1}{n}x\right) \right| \leq \left| \sin\left(\frac{1}{n_\epsilon}\pi\right) \right| \leq \left| \sin\left(\frac{1}{\frac{\pi}{\arcsin(\epsilon)}}\pi\right) \right| = \epsilon.$$

$\implies f_n$ gleichmäßig konvergent. □

(b) Beh.: $f_n(x) := nx(1-x)^n$, $x \in [0, 1]$ ist punktweise konvergent mit $f(x) = 0$, aber nicht gleichmäßig konvergent.

Beweis. Sei $x \in [0, 1]$. Für $x = 0$ und $x = 1$ gilt $f_n(1) = f_n(0) = f(0) \forall n \in \mathbb{N}$.

Für $x \in (0, 1)$ gilt

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(n+1)(1-x)}{n} = \frac{n+1-x(n+1)}{n}.$$

Wähle nun $n_0 = \left\lceil \frac{1-x}{x} \right\rceil$. Dann gilt $\forall n > n_0$:

$$x(n+1) > x \left(\frac{1-x}{x} + 1 \right) = 1 \implies \frac{\overbrace{n+1-x(n+1)}^{< n}}{n} < 1.$$

Damit ist $\forall n > n_0$ f_n streng monoton fallend. Da außerdem $f_n(x)$ nach unten beschränkt durch 0, gilt damit $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. $\implies f_n$ konvergiert punktweise gegen $f(x) = 0$.

Z.z.: f_n nicht gleichmäßig konvergent. $f_n(x)$ ist als Produkt von stetigen Funktionen stetig und nach Produktregel differenzierbar. Mit Produkt- und Potenzregel folgt demnach

$$f'_n(x) = n[(1-x)^n - nx(1-x)^{n-1}]$$

$$= n(1-x)^{n-1}[1-x-nx]$$

$$f''_n(x) = n^2[-(1-x)^{n-1} - (1-x)^{n-1} + x(n-1)(1-x)^{n-2}]$$

$$= n^2(1-x)^{n-2}[-2+x+nx].$$

Für $\xi_n = \frac{1}{n+1}$ gilt

$$f'_n(\xi_n) = n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n-1} \left[1 - \frac{1}{n+1} - \frac{n}{n+1}\right] = n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n-1} \left[\frac{n+1-1-n}{n+1}\right] = 0$$

$$f''_n(\xi_n) = n^2 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n-2} \left[-2 + \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\right] = n^2 \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n-2}}_{>0} \underbrace{\left[\frac{-n-1}{n+1}\right]}_{<0} < 0.$$

Damit folgt, f_n hat einen Hochpunkt bei $x = \xi_n$. Weiter gilt

$$f_n(\xi_n) = \frac{1}{n+1} n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\frac{1}{n} + 1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}.$$

Sei nun $\frac{1}{2e} > \epsilon > 0$ beliebig. Dann ex. ein $N_0 \in \mathbb{N}$, s.d. gilt $\forall n > N_0$:

$$\left| \frac{1}{e} - f_n(\xi_n) \right| < \epsilon \implies |f(\xi_n)| + \epsilon > \left| \frac{1}{e} \right| \implies |f_n(\xi_n)| > \frac{1}{e} - \epsilon.$$

Sei nun $N_0 < n_\epsilon \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann wähle $x = \xi_{n_\epsilon}$. Damit folgt

$$|f_{n_\epsilon}(\xi_{n_\epsilon}) - f(\xi_{n_\epsilon})| = |f_{n_\epsilon}(\xi_{n_\epsilon})| > \frac{1}{e} - \epsilon > 2\epsilon - \epsilon = \epsilon.$$

$\implies f_n$ nicht gleichmäßig konvergent.

□