Analysis I

Prof. Dr. Ekaterina Kostina

Mitschrift von Christian Merten
christian.merten@stud.uni-heidelberg.de

WS 2019/20

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Mengen und Aussagen

Definition 1.1. Seien A und B Mengen.

- **Teilmenge** $B \subset A$ bedeutet: jedes Element von B ist auch Element von A
  B ist eine Teilmenge von A; bsp.: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- **Mengengleichheit** Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn $A \subset B$ und $B \subset A$.
- **Strikte Teilmenge** B ist eine strikte Teilmenge von A, wenn es ein Elemnt $a \in A$ gibt, mit $a \notin B$.
- **Leere Menge** oder Nullmenge"$\emptyset$ enthält keine Elemente.
  Es gilt konventionsgemäß $\emptyset \in A$ für alle Mengen A
- **Vereinigung** von A und B: $A \cup B := \{ \ a \mid a \in A \text{ oder } a \in B \ \}$
- **Durchschnitt** von A und B: $A \cap B := \{ \ a \mid a \in A \text{ und } a \in B \ \}$
- **Differenz** von A und B: $A \setminus B := \{ \ a \mid a \in A \text{ und } a \notin B \ \}$
- **Produktmenge**: $A \times B := \{ \ (a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B \ \}$
- **Disjunkte Mengen** A und B sind disjunkt, falls gilt: $A \cap B = \emptyset$

Bemerkung 1.2. Das ODER im mathematischen Sinne bedeutet das einschließliche oder und nicht das entweder oder.

1.2 Wahrheitstabellen

Definition 1.3. Seien V und E Aussagen.
Eine Aussage ist ein Satz, von dem eindeutig feststeht, ob er wahr oder falsch ist.

- **UND und ODER** Man definiere die Verknüpfungen UND $\wedge$ und ODER $\vee$ wie folgt:

V	E	V und E	V oder E
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

- **Negation** Man definiere die NICHT-Verknüpfung wie folgt:

V	$\neg V$
w	f
f	w

- **Implikation** Wenn V gilt, gilt auch E. Man sagt: V ist hinreichende Bedingung für E, oder die Voraussetzungen von V sind hinreichend für die Gültigkeit von E. Die Gültigkeit von E ist notwendig für die Gültigkeit von V, oder die Ungültigkeit von E impliziert die Ungültigkeit von V. Es gilt: $V \implies E$ ist wahr, falls $\neg V$ oder E wahr ist.

V	E	$V \implies E$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

- **Äquivalenz** Man definiere die Äquivalenzrelation $V \Leftrightarrow E$ als:
$V \Leftrightarrow E$ steht für $V \implies E$ und $E \implies V$.

V	E	$V \Leftrightarrow E$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Definition 1.4 (Quantoren)**.** Man definiere folgende Quantoren:

- $\forall$ Allquantor, also als: für alle.
- $\exists$ Existenzquantor, also als: es existiert ein.
- $\exists!$ als: es existiert genau ein a.

Bemerkung 1.5. Häufig hilft es Aussagen zu negieren. Hierbei gelten folgende Regeln (können mithilfe von WT gezeigt werden):

- $\neg(\forall a \in A : V(a)) \Leftrightarrow (\exists a \in A : \neg V(a))$
- $\neg(\exists a \in A : V(a)) \Leftrightarrow (\forall a \in A : \neg V(a))$

Bemerkung 1.6 (Kontraposition)**.** Zwei weitere Hilfsmittel:

- $(V \implies E) \Leftrightarrow (\neg E \implies \neg V)$
- $(V \Leftarrow E) \Leftrightarrow (\neg E \Leftarrow \neg V)$

Bemerkung 1.7. Zu Quantoren:

- Quantoren müssen immer angegeben werden.
- Die Reihenfolge der Quantoren ist essentiell.
  Bsp.: $T :=$ Menge aller Töpfe, $D :=$ Menge aller Deckel, $V(a, b) =$ Deckel b passt auf Topf a.
  $\forall a \in T : \exists b \in D : V(a, b)$ ist vermutlich wahr,
  $\exists b \in D : \forall a \in T : V(a, b)$ ist vermutlich falsch.

1.3 Abbildungen

Definition 1.8 (Abbildungen)**.** Seien A, B Mengen. Eine Abbildung f zwischen A und B $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ zugeordnet. Hierbei nenne man A Definitionsmenge von f und B Wertemenge von f.

Definition 1.9 (Folgen)**.** Zahlenfolgen sind Abbildungen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibweise: statt $a(n)$ wird a_n und statt $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ wird $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geschrieben.

Definition 1.10 (injektiv, surjektiv, bijektiv)**.** Es sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

- Abbildung f heißt injektiv, wenn gilt:
  $$\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2.$$
- Abbildung f heißt surjektiv wenn gilt:
  $$\forall b \in B : \exists a \in A : b = f(a).$$
- Abbildung f heißt bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Beispiel 1.11. Es sei f eine Abbildung: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x)$. Dann ist f weder injektiv, noch surjektiv.
Jedoch ist $f : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ x \mapsto \sin(x)$ surjektiv, aber nicht injektiv.
Und $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1],\ x \mapsto \sin(x)$ ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

Definition 1.12 (Bild)**.** Das Bild von A_1 (unter f):
$$f(A_1) := \{f(a) \mid a \in A_1\} = \{b \in B \mid \exists a \in A_1 : b = f(a)\}$$

Definition 1.13 (Urbild)**.** Das Urbild von B_1 (unter f):

$$f^{-1}(B_1) := \{a \mid f(a) \in B_1 \} \subset A$$

Definition 1.14 (Inverse)**.** Zu einer bijektiven Abbildung existiert eine sogenannte Umkehrabbildung, auch Inverse, die ebenfalls bijektiv ist:

$$f^{-1} : B \to A \text{ mit } a = f^{-1}(b) \;:\Leftrightarrow\; b = f(a)$$

Bemerkung 1.15. Nur bijektive Abbildung besitzen Inverse.
Die Notation $f^{-1}(B)$ hat zwei Bedeutungen:

- Urbild von B unter f
- Bild von B unter f^{-1}

Das Urbild ist also für beliebige Abbildungen definiert

Definition 1.16 (Komposition von Abbildungen)**.** Es sein $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Dann sei:

$$g \circ f : A \to C, \;(g \circ f)(a) := g(f(a))$$

Man sagt: $g \circ f$ heißt g komponiert f.

Definition 1.17 (Morphismen)**.** Seien A und B Mengen mit einer gewissen Operation $\oplus_A$ bzw. $\oplus_B$, z.B. Addition, Multiplikation.
Die Abbildung $f : A \to B$ heißt homomorph (strukturerhaltend), wenn gilt:

$$\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1 \oplus_A a_2) = f(a_1) \oplus_A f(a_2)$$

Ein bijektiver Homomorphismus heißt Isomorphismus.

Definition 1.18 (Äquivalenzrelation)**.** Äquivalenzrelation auf eine Menge A ist eine Beziehung $a \sim b$ zwischen Elementen von A mit Eigenschaften

- R_1 (Relation)für $\forall a, b \in A$ gilt entweder $a \sim b$ oder $a \nsim b$
- R_2(Reflexivität) $a \sim a$
- R_3(Symmetrie) $a \sim b \implies b \sim a$
- R_4(Transitivität) $a \sim b$ und $b \sim c \implies a \sim c$

Definition 1.19 (Äquivalenzklasse)**.** $[a] := \{b \in A \mid b \sim a \}$
a heißt Repräsentant der Äquivalenzklasse $[a]$.

Beispiel 1.20. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
Man definiere folgende Äquivalenzrelation:

$$(n, m) \sim (n', m') :\Leftrightarrow n + m' = n' + m \Leftrightarrow n - m = n' - m'$$

R_1 und R_2 sind offenbar erfüllt.
R_3 $n + m' = n' + m \implies (n', m') \sim (n, m)$
R_4 $(n, m) \sim (n', m')$ und $(n', m') \sim (n'', m'')$ gilt:
$(n' + m') + m'' = (n' + m) + m'' = (n' + m'') + m = (m' + n'') + m$
$\implies n + m'' = n'' + m \implies (n, m) \sim (n'', m'')$

Die zugehörigen Äquivalenzklassen bestehen aus allen Paaren natürlicher Zahlen mit gleicher Differenz.

1.4 Vollständige Induktion

Beispiel 1.21. Betrachte die Summe der ersten n natürlichen Zahlen. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Induktionsanfang für $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+2)}{2} = 1.$$

Induktionsschritt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

□

Definition 1.22. Seien $m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$
$a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann $a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n = \sum_{k=m}^{n} a_k$. Falls $m > n$, dann $\sum_{k=m}^{n} a_k := 0$

Beispiel 1.23. Definiere rekursiv für $x \in \mathbb{R}$: $x^0 := 1$ und $x^{n+1} := x \cdot x^n, n \in \mathbb{N}_0$ Betrachte

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n, x \in \mathbb{R}.$$

Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

geometrische Summenformel.

Beweis. Induktionsanfang für $n = 1$:

$$1 + x = \frac{(1+x)(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}.$$

Induktionsschritt: $n \to n + 1$

$$\sum_{n=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1}$$
$$= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \qquad = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{(1-x)(x^{n+1})}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.$$

□

Alternativbeweis mit Teleskop-Summe.

$$\begin{aligned}
1 - x^{n+1} &= 1 - x + x - x^2 + x^2 - \ldots - x^n + x^n - x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k - x \sum_{k=0}^{n} x^k \\
&= (1-x) \sum_{k=0}^{n} x^k.
\end{aligned}$$

□

Als Anwendung der geometrischen Summenformel ergeben sich nützliche Formeln, z.B. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

Beweis. Für $a = 0$ und $a = b$ stimmt die Formel offenbar.
Betrachte geometrische Reihe mit $x := \frac{b}{a} \neq 1$

$$1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n = 1 - x^n = (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k = (1 - \frac{b}{a}) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^k \quad \Big| \cdot a^n$$
$$\Longrightarrow a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{-k} a^{n-1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

□

1.5 Elemente der Kombinatorik

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Fakultät $n!$ rekursiv definiert durch:

$$1! := 1 \text{ und } \forall n \in \mathbb{N} : (n+1)! = n!(n+1).$$

Per Definition $0! := 1$

Satz 1.24 (Permutationen)**.** Die Anzahl aller Anordnungen (oder Permutationen) von $n \in \mathbb{N}$ Elementen ist $n!$.

Beweis. Induktionsanfang:

$n = 1$: Eine Anordnung 1
$n = 2$: Zwei Anordnungen 12, 21

Induktionsschritt $n \to n+1$: Anzahl von Anordnungen der Elemente $1, \dots, n+1$, die das Element $(n+1)$ auf Platz 1 hat bei beliebiger Anordnung der anderen Elemente nach Induktionsannahme ist $n!$. Für jedes der $n+1$ Plätze ergeben sich wieder $n!$ Anordnungen, d.h. insgesamt: $n!(n+1) = (n+1)!$ $\square$

Definition 1.25 (Binomialkoeffizient)**.** Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir:

$$\begin{aligned} n \geq k \geq 1\colon \binom{n}{k} &:= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \\ k = 0\colon \binom{n}{0} &:= 1 \end{aligned}$$

$\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k-Elementigen Teilmengen einer n-Elementigen Menge, z.B.: Lotto $\binom{49}{6} = 13.983.816$.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}. \end{aligned}$$

Es folgt $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Lemma 1.26. Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $0 < k < n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-1-(k-1)+1)}{(k-1)!}+\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-1-k+1)}{(k-1)!k}\\ &= \frac{(n-1)\dots(n-k+1)(k+n-k}{k!}\\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}=\binom{n}{k}.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.27. Mit Hilfe der Rekursionsformel

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}.$$

bzw

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}.$$

berechnet man die Binomialkoeffizienten explizit, auch bekannt als „Pascalsches Dreieck".

Satz 1.28 (Binomische Formel)**.** Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

bzw.

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n.$$

Beweis durch Induktion. Induktionsanfang $n = 1$:

$$a+b=\binom{1}{0}a+\binom{1}{1}b=1a+1b.$$

Annahme: Die Formel gilt für ein $n \geq 1$

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n\\ &= (a+b)\left(\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n\right)\\ &= \binom{n}{0}a^{n+1}+\binom{n}{1}a^nb+\ldots+\binom{n}{n-1}a^2b^{n-1}+\binom{n}{n}ab^n\\ &\quad+\binom{n}{0}a^nb+\binom{n}{1}a^{n-1}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^n+\binom{n}{n}b^{n+1}\\ &= \binom{n+1}{0}a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^nb+\ldots+\binom{n+1}{n}ab^n+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}.\end{aligned}$$

□

1.6 Grundlegendes über Zahlenmengen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \text{ natürliche Zahlen.}$$

Auf $\mathbb{N}$ sind die arithmetischen Operationen „+" (Addition) und „·" (Multiplikation) definiert. Für diese gelten u.a. die Regeln:

$n + m = m + n$ bzw. $n \cdot m = m \cdot n$	Kommutativität
$(n + m) + k = n + (m + k)$ bzw. $(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k)$	Assoziativität
$(n + m) \cdot k = n \cdot k + m \cdot k$	Distributivität

Subtraktion und Division sind nicht für alle Paare der natürlichen Zahlen definiert ($1-2 \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$), d.h. die natürlichen Zahlen sind bezüglich der Subtraktion und Division „unvollständig". Dies bedeutet, dass für $n, m \in \mathbb{N}$ z.B.: die Gleichung

$$n + x = m$$

nicht immer lösbar ist.

Deshalb werden die natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen erweitert.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \text{ ganze Zahlen.}$$

In $\mathbb{Z}$ hat die Gleichung $n + x = m$ die (eindeutige) Lösung: $x = m - n \in \mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}$ ist vollständig bezüglich der Subtraktion aber unvollständig bezüglich der Division, d.h. für beliebige $b, y \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, ist die „lineare" Gleichung $b \cdot x = y$ nicht immer durch ein $x \in \mathbb{Z}$ lösbar.

Diese Beschränkung wird durch die Einführung der rationalen Zahlen behoben:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{r}{s} \mid r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N} \right\}.$$

Die Menge $\mathbb{Q}$ ist vollständig bezüglich der vier elementaren arithmetischen Operationen (bis auf die unzulässige Division durch Null).

$$a = \frac{r}{s}, b = \frac{u}{v} \in \mathbb{Q} = \begin{cases} a + b = \frac{r}{s} + \frac{u}{v} & := \frac{r \cdot v + u \cdot s}{s \cdot v} \\ a - b & := \frac{r \cdot v - u \cdot s}{s \cdot v} \\ a \cdot b & := \frac{r \cdot u}{s \cdot v} \\ \frac{a}{b} & := \frac{r \cdot v}{s \cdot u} \end{cases}.$$

$\mathbb{Q}$ bildet mit der Operation „+" und „·" einen „Körper".

1.7 Was ist ein Körper?

Sei K eine Menge mit Operationen „+" und „·".

Operation „+" erfüllt die Axiome der Addition

(A1) Kommutativität $\forall a, b \in K : a + b = b + a$

(A2) Assoziativität $\forall a, b, c \in K : (a + b) + c = a + (b + c)$

(A3) Neutrales Element $\exists 0 \in K\colon \forall a \in K\colon a + 0 = a$

(A4) Additives Inverses $\forall a \in K\colon \exists - a \in K\colon a + (-a) = 0$

Operation „·" erfüllt die Axiome der Multiplikation

(M1) Kommutativität $\forall a, b \in K\colon a \cdot b = b \cdot a$

(M2) Assoziativität $\forall a, b, c \in K\colon (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(M3) Neutrales Element $\exists 1 \in K \setminus \{0\} =: K^*\colon \forall a \in K\colon a \cdot 1 = a$

(M4) Additives Inverses $\forall a \in K\colon \exists a^{-1} \in K\colon a \cdot a^{-1} = 1$

Zusätzlich erfüllen „+" und „·" die Distributivität (D):

$$\forall a, b, c \in K : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Definition 1.29 (Körper)**.** Eine Menge K mit Operationen „+" und „· " (K, +, ·) die Axiome A1-A4, M1-M4 und D erfüllt, heißt Körper.

Beispiel 1.30. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper
$(\mathbb{Z}, +, \cdot\,)$ ist kein Körper

Definition 1.31 (Angeordneter Körper)**.** Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Es $\exists p \subset K$ eine Teilmenge, die Axiome erfüllt:

1. $\forall \in K$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:
   (a) $a \in P$
   (b) $a = 0$
   (c) $-a \in P$
2. Aus $a > 0$ und auch $b > 0$ folgt: $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$

Dann heißt $(K, +, \cdot, >)$ angeordneter Körper.

Definition 1.32 (Positivität)**.** Sei $(K, +, \cdot, >)$ ein angeordneter Körper. $a \in K$ heißt positiv falls $a > 0$. $a \in K$ heißt negativ falls $a < 0$.

$$K^+ := \{a \in K \mid a > 0\}.$$
$$K^- := \{a \in K \mid a < 0\}.$$

Ordnungsrelation für $a, b \in K$

$$\begin{aligned} a < b &\iff b - a \in K^+ \\ b > a :&\iff a < b \\ a \le b :&\iff a < b \land a = b \\ b \ge a :&\iff a \le b \\ &. \end{aligned}$$

Für je zwei $a \in K, b \in K$ gilt genau eine der Relationen $a < b, a = b, a > b$.

Es gelten folgende Regeln:

- $a < b, b < c \implies a < c$ Transitivität
- $a < b \implies a + c < b + c, c \in K$
- $a < b \implies a \cdot c < b \cdot c, c \in K^+$
- $a \geq b, b \geq a \iff a = b$
- $a < b, a > 0, b > 0 \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Beispiel 1.33 (Positivität auf $\mathbb{Q}$)**.**

$$\mathbb{Q}^+ := \left\{a \in Q \mid a = \frac{r}{s}, r, s \in \mathbb{N}\right\}.$$

Definition 1.34 (Absolutbetrag)**.** Sei $(K, +, \cdot, >$ ein angeordneter Körper Dann ist

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}.$$

eine Abbildung $|\cdot|: K \to K$ mit den Eigenschaften:

- $|a| = 0 \iff a = 0$ (Definitheit)
- $|ab| = |a||b|$ (Multiplikativität)
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis der Dreiecksungleichung. Beobachtung: $\pm a \leq |a| \implies a + b \leq |a| + |b| \implies -(a + b) \leq |a| + |b|$ □

Es folgt aus den Eigenschaften:

- $|a - b| = 0 \implies a = b$
- $|-a| = |a|$
- $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
- $||a| - |b|| \leq |a - b|$ (folgt aus: $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$ und $|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|$)

Satz 1.35 (Dezimalbruchdarstellung)**.** Jede rationale Zahl a besitzt eine endliche oder periodische Dezimalbruchdarstellung der Form:

$$a = \pm(a_0 + 0, d_1 \ldots d_s) :\iff a = \pm\left(a_0 + \sum_{k=1}^{s} d_k \cdot 10^{-k}\right).$$

bzw.

$$a = \pm(a_0 + 0, d_1 \ldots d_s \overline{d_{s+1} \ldots d_{s+t}}).$$

$a_0 \in N_0, d_1 \dots d_s \in \{0, 1, \dots, 9\}$ Ziffern

Umgekehrt stellt jede Dezimalbruchzerlegung dieser Art eine rationale Zahl dar.
Hier: bei periodischen Dezimalbrüchen ist die Periode $\overline{9}$ nicht zugelassen:

$$a_0, d_1 \dots d_{k-1} d_k \overline{9} := a_0 + 0, d_1 \dots d_k (d_k + 1), d_k < 9.$$

Beweis. Siehe Lehrbuch □

Kapitel 2

Die Reellen Zahlen

2.1 Von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen

Lemma 2.1 (Irrationalität der Quadratwurzel)**.** Die quadratische Gleichung $x^2 = 2$ besitzt keine rationale Lösung.

Beweis durch Widerspruch. Angenommen: Es existiert eine rationale Lösung

$$x := \sqrt{2} = \frac{r}{s}.$$

mit Zahlen $r \in \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{N}$.

O.B.d.A. (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit) nehmen wir an, dass r und s teilerfremd sind.

Dann gilt: $r \neq 0$ und $r^2 = 2s^2$ und $\frac{1}{2}r^2 = s^2$. Also muss r^2 und auch r gerade sein, denn $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ ungerade (Kontraposition). Damit sind auch $\frac{1}{2}r^2$ gerade und s^2 gerade.

Aber wegen Teilerfremdheit können r^2 und s^2 nicht beide durch zwei teilbar sein. $\implies$ Widerspruch zur Annahme □

Bemerkung 2.2. Allgemeiner: „quadratische" Gleichung

$$a + bx + cx^2 = 0.$$

ist nicht für beliebig gewählte $a, b, c \in \mathbb{Q}$ durch ein $x \in \mathbb{Q}$ lösbar.

Bemerkung 2.3 (Beweisarten)**.** Direkter Beweis:

$$E \implies E_1 \implies E_2 \implies \ldots \implies E_k \implies V.$$

Indirekter Beweis: Zeigen E und $\neg V$ immer falsch. Da E immer wahr ist, muss $\neg V$ falsch sein. Da $\neg V$ falsch ist, ist V wahr.

Ziel: Konstruiere rationale Zahlen, welche die Gleichung $x^2 = 2$ mit zunehmender Genauigkeit erfüllen, z.B. rekursiv durch Einschließung mit Hilfe von Dezimalbrüchen.

Wir nutzen die Eigenschaft: $a, b > 0$ und $a^2 < b^2 \implies a < b$, folgt aus:

$$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a), (b + a > 0).$$

Start: $a_1 := 1,4$, $b_1 := 1,5$ mit $a_1 < b_1, a_1^2 = 1,96 < 2 < 2,25 = b_1^2$

2 Fälle:

Fall a) Es liege für ein $n \in \mathbb{N}$ eine Einschließung vor:

$$a_n = 1, d_1 d_2, \dots d_{n-1} d_n < b_n = 1, d_1 d_2 \dots d_{n-1}(d_n + 1).$$
$$a_n^2 < 2 < b_n^2.$$

$d_k \in \{0, 1, \dots, 9\}, k = 1 \dots n-1, d_n \leq 8$

Die nächste Einschließung ist

$$a_{n+1} := 1, d_1 \dots d_n, d_{n+1} \qquad d_{n+1} \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

a_{n+1} möglichst groß aber $a_{n+1}^2 < 2$.

und

$$b_{n+1} := \begin{cases} 1, d_1, \dots d_n(d_{n+1} + 1) & \text{für } d_{n+1} \leq 8 \\ 1, d_1, \dots (d_n + 1)0 & \text{für } d_{n+1} = 9 \end{cases}.$$

Nach Konstruktion:

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n.$$
$$a_{n+1}^2 < 2 < b_{n+1}^2.$$

Fall b) Für ein $n \in \mathbb{N}$ liegt eine Einschließung vor

$$a_1 = 1, d_1 \dots d_{n-1} d_n < b_n = 1, d_1 d_2 \dots d_{n-1}(d_n + 1)0 \dots 0.$$
$$a_n^2 < 2 < b_n^2 \text{ mit } d_k \in \{0, 1, \dots, 9\}, k = 1 \dots n-1.$$
$$d_n \leq 8, d_{n+1} = \dots = d_n = 9.$$

Die nächste Einschließung

$$a_{n+1} := 1, d_1 \dots d_n, d_{n+1}, d_{n+1} \in 0, 1, \dots, 9.$$

a_{n+1} möglichst groß, aber $a_{n+1}^2 < 2$.

$$b_{n+1} = \begin{cases} 1, d_1 \dots d_n(d_{n+1} + 1) & \text{für } d_{n+1} \leq 8 \\ 1, d_1 \dots d_{m-1}(d_m + 1)0 \dots 0 & \text{für } d_{n+1} = 9 \end{cases}.$$

Der Fall b) kann nur endlich oft hintereinander auftreten, dann wäre $a_n = b_n$ ab einem gewissen n und folglich $a_n^2 = 2$

Nach Konstruktion:

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n.$$
$$a_{n+1}^2 < 2 < b_{n+1}^2.$$

Wir erhalten 2 Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in N}$ mit den Eigenschaften

$$1,4 = a_1 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq \dots b_1 = 1,5.$$

Konkret: $a_1 = 1,4$, $a_2 = 1,41$, $a_3 = 1,414$ $b_1 = 1,5$, $b_2 = 1,42$, $b_3 = 1,415$

Abstand $b_n - a_n \leq 10^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ wird immer kleiner $\implies$ wir sollen die Zahl $\sqrt{2}$ eventuell erfassen!

Definition 2.4 (Zahlenfolge)**.** Eine Menge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nummerierter rationaler Zahlen wird „Folge” genannt.

Beispiel 2.5. $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

$a_1 = 2$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{5}{4}$

Offenbar, $1 + \frac{1}{n} \to 1, n \to \infty$ bzw.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

d.h. Folge konvergiert gegen 1

Definition 2.6 (Konvergenz)**.** Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent, gegen einen „Limes” a, wenn gilt:

$$|a_n - a| \to 0, n \to \infty.$$

Falls $|a_n|$, $n \to \infty$ heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt divergent.

Präziser (Cauchy)

Eine Folge $(a_n)_{n\in N}$ ist „konvergent” gegen einen Grenzwert a, wenn:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists n := n(\varepsilon) = n_\varepsilon.$$

sodass

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_\varepsilon.$$

Lemma 2.7. $(a_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy Folgen.

Beweis. Sei $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, aber $b < a$. Dann $\exists\delta > 0$ mit $b + \delta = a$.

Wegen der Konvergenz:

$$b_n \to b, a_n \to a, n \to \infty.$$

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ sd. } |b - b_n| \leq \frac{1}{2}\delta.$$

und

$$|a - a_n| \leq \frac{1}{2}\delta\ \forall n > n_\varepsilon.$$

Dann

$$b_n = b_n - b + b - a + a - a_n + a_n \leq |b_n - b| + b - a|a - a_n| + a_n \leq \frac{1}{2}\delta - \delta + \frac{1}{2}\delta + a_n = a_n.$$

$\Longrightarrow$

$$b_n \leq a_n.$$

Widerspruch zur Annahme, dass $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung 2.8 (Folgerung aus 3)**.** Sei Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und $a_n \to a$, $a > 0$ $n \to \infty$. Dann $a_n > 0$ für fast alle n.

Beweis. Annahme: $a_n \leq 0$ für fast alle $n \in N$, dann $a_n \to a \leq 0 \leftarrow \{0\}$ $n \in N$ □

Ziel: Reelle Zahlen als Grenzwerte von rationalen Cauchy Folgen.

Wichtig: Zwei Cauchy Folgen mit gleichem Limes definieren gleiche Zahl. Deshalb: Äquivalenzklassen

Definition 2.9 (Äquivalenzrelation für Cauchy Folgen rationaler Zahlen).

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a'_n)_{n\in\mathbb{N}} :\iff |a_n - a'_n| \to 0, n \to \infty.$$

Die Relation ist Äquivalenzrelation. 1. Reflexivität ($a \sim a$) (trivial)

2. Symmetrie ($a \sim b \implies b \sim a$)

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff |a_n - b_n| \to 0 \iff |b_n - a_n| \to 0 \iff (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

3. Transitivität $a \sim b, b \sim c \implies a \sim c$

$$\begin{aligned}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\ (c_n)_{n\in\mathbb{N}} &\iff |a_n - b_n| \to 0, |b_n - c_n| \to 0 \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \text{ s.d.} \\ &\qquad \forall n \geq n_\varepsilon.\end{aligned}$$

Dann

$$|a_n - c_n| = |(a_n - b_n) + (b_n - c_n)| \leq |a_n - b_n|.$$

□

Definition 2.10 (Äquivalenzklassen).

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{R}} :=& \{[a_n]_{n\in\mathbb{N}}\} \\ =& \{(a'_n)_{n\in\mathbb{N}} | (a'_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\} \\ =& \{(a'_n)_{n\in\mathbb{N}} | (a'_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0\}.\end{aligned}$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Repräsentant von Klasse $[(a_n)]_{n\in\mathbb{N}}$

Bemerkung 2.11. $a \in \mathbb{Q} \implies$

$$[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n := a] \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ einer Cauchy Folge

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \in [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}].$$

Jede Äquivalenzklasse $[((a_n)_{n\in\mathbb{N}})]$ von Cauchy Folge rationaler Zahlen definiert genau eine reelle Zahl

Satz 2.12. Jeder Äquivalenzklasse $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ entspricht genau einem (möglicherweise unendlichen) Dezimalbruch.

Die Menge aller dieser Dezimalbrüche wird bezeichnet als Menge $\mathbb{R}$ der „reellen Zahlen".

$$\mathbb{R} = \{a := \pm(a_0 + 0, d_1 d_2 d_3 \dots d_k \mid a_0 \in \mathbb{N}_0, d_k \in \{0, \dots, 9\}\}.$$

Für eine CF rationaler Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird $a \in \mathbb{R}$ als Grenzwert bezeichnet:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt eine „approximierende" Folge von $a \in \mathbb{R}$. In diesem Sinne hat jede CF rationaler Zahlen nach Konstruktion einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.

Bemerkung 2.13 (Erinnerung Geometrische Reihe)**.**

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, x + 1.$$

Beweis. 1. $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \overline{\mathbb{R}}$

$$a = \pm(a_0 + 0, d_1 d_2 d_3 \ldots).$$

definieren wir eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (rationaler) endlicher Teilbrüche:

$$a_n = \pm(a_0, d_1 \ldots d_n), a_0 \in \mathbb{N}_0, d_k \in \{0, \ldots, 9\}.$$

zu zeigen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy Folge.
Sei $m > n + 1$, dann

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= |a_0 + 0, d_1 d_2 \ldots d_n - (a_0 + 0, d_1 d_2 \ldots d_n d_{n+1} \ldots d_m)| \\
&= |0, 00 \ldots 0 d_{n+1} \ldots d_m| \\
&= d_{n+1} 10^{-(n+1)} + \ldots + d_m 10^{-m} \\
&\le 10^{-n}(d_{n+1} 10^{-1} + \ldots + d_m 10^{-m+n}) \\
&\le 10^{-n}(10^0 + \ldots + 10^{-m+n+1}) \\
&= 10^{-n}\left(\left(\frac{1}{10}\right)^0 + \ldots + \frac{1}{10}^{m-n-1}\right) \\
&= 10^{-n}\frac{1 - \frac{1}{10}^{m-n}}{1 - \frac{1}{10}} \\
&\le 10^{-n}\frac{1}{\frac{9}{10}} \\
&= 10^{-n}\frac{10}{9} \to 0, n \to \infty.
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy Folge und repräsentiert eine Klasse $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \overline{\mathbb{R}}$
„Einbettung" $a \mapsto [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$

2. Wir zeigen, dass diese „Einbettung" bijektiv ist.
a) $a \mapsto [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ ist injektiv ($\forall a, a' \in \overline{R}$ gilt: aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt $a = a'$)
Für

$$\begin{aligned}
a &= a_0 + 0, d_1 d_2 \ldots \\
a' &= a'_0 + 0, d'_1 d'_2 \ldots
\end{aligned}$$

gilt:

$$\begin{aligned}
|a_n - a'_n| &= |a_0 + 0, d_1 \ldots d_n - (a'_0 + 0, d'_1 \ldots d'_n)| \\
&\le \varepsilon, \forall n \ge n_\varepsilon, \forall \varepsilon > 0.
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $a = a'$

b) „Einbettung" $a \mapsto [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ ist surjektiv

(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge

$$\Longrightarrow z = 0 = 0, 00 \ldots.$$

(ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge Dann fast alle $a_n > 0$ oder fast alle $a_n < 0$ O.B.d.A. $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$
Ziel: $z \geq 0$ zu konstruieren.
Falls $a_n < 0$ (bzw. $-a_n > 0$ konstruiert $-z$)

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \implies \text{beschränkt} \implies \exists N \in \mathbb{N}(N \geq 2) \text{ s.d. } 0 < a_n < N, n \in \mathbb{N}.$$

Dann $\exists z_0 \in \mathbb{N}_0$, s.d. im Interval:

$$I_0 := \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq z_0 \leq x < z_0 + 1 < n\}.$$

unendlich viele Elemente von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegen.

□

Heute: Frustcafé (deswegen kürzere Plenarübung)

Nächsten Mittwoch: Vorlesung fällt aus, aber Ersatztermin wird gesucht.

Fortsetzung Beweis:

Beweis. 1. Zz: $\forall[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \overline{\mathbb{R}}\ \exists z \in \mathbb{R}$

$$z = \pm\left(z_0 + 0, d_1 d_2 d_3 \ldots\right)).$$

O.B.d.A. $z > 0, a_n > 0, n \in \mathbb{N}$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ C.F.} \implies 0 < a_n < N\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\implies z_0 \in \mathbb{N}_0$, s.d. O.B.d.A. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I_0$

$$I_0 := \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq z_0 \leq x < z_0 + 1 < N\}.$$

I_0 wird unterteilt in 10 Teilintervalle.
Für ein $d_1 \in \{0, \ldots, 9\}$ ein Intervall

$$I_1 := \{x \in I_0 \mid z_0 + d_1 \cdot 10^{-1} \leq x < z_0 + (d_1 + 1) \cdot 10^{-1}\}.$$

Sei $z_1 = z_0 + 0, d_1$, dann

$$I_1 = \{x \in I_0 \mid z_1 \leq x < z_1 + 10^{-1}\}.$$

$\implies \exists n_1$ Index s.d. $|z_1 - a_{n_1}| \leq 10^{-1}$
usw. ...
Ergebnis: eine Folge von Teilintervallen
o.B.d.A.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ldots \subset I_{k+1} \subset I_k \subset \ldots \subset I_1 \subset I_0.$$

$$z_k := z_{k-1} + d_k \cdot 10^{-k} \in \mathbb{Q}.$$

$$I_k = \{x \in I_{k-1} \mid z_k \leq x < z_k + 10^{-k}\}.$$

$\exists n_k$: Index s.d. $|z_k - a_{n_k}| \leq 10^{-k}$

Das heißt für eine Folge

$$z_k := z_0 + 0, d_1 d_2 \dots d_k \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N}.$$

existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von der C.F. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, s.d. $|z_k - a_{n_k}| \leq 10^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$
$\Longrightarrow$ $(z_k - a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Nullfolge, d.h.
$\Longrightarrow$ $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \sim (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$
$\Longrightarrow$ $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \sim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\Longrightarrow$ $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$
und der resultierende Dezimalbruch ist:

$$z := z_0 + 0, d_1 d_2 \dots d_k \dots \in \mathbb{R}.$$

Wir haben gezeigt:

$$\forall [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \overline{\mathbb{R}}\text{: } \exists z \in \mathbb{R}.$$

Damit: $\Longrightarrow$ Abbildung ist surjektiv und damit bijektiv.

$$\Longrightarrow \exists \text{„inverse Abbildung"} : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}.$$

die auch bijektiv ist.

Diese Abbildung ist auch verträglich mit der Addition und der Multiplikation, d.h. $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \mapsto a$ und $[(a'_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto a']$

Dann $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}] := a + a'$
$[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}] := a \cdot a'$

Abbildung $\mathbb{R} \longleftrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist Isomorphismus. □

Bemerkung 2.14. Die Darstellung ist durch einen Dezimalbruch ist nicht immer eindeutig. z.B.:

$$0,9999\dots = 0,\overline{9} = 1 = 1,0000\dots.$$

Deshalb, falls $z = z_0 + 0, d_1 d_2 \dots d_k 999$ $d_k \leq 8$ dann:

$z := z_0 + 0, d_1 d_2 \dots (d_k + 1) 0 \dots$

Bemerkung 2.15. Der Satz gilt auch für „b-adische" Brüche mit Basis $b \in \mathbb{N}, b \geq 2 : a \in \mathbb{R}$ besitzt eine sogenannte „b-adische Entwicklung":

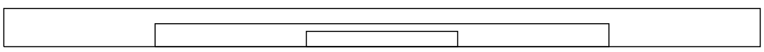
$$a = \pm(a_0 + 0, d_1 d_2 \dots) = \pm(a_0 + d_1 \cdot b^{-1} + d_2 \cdot b^{-2} + \dots).$$

mit $a_0 = g_0 + g_1 \cdot b + g_2 \cdot b^2 + \dots \in \mathbb{N}_0$ mit Ziffern $d_n, g_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ Für $b = 2$: dijadische Entwicklung

2.1.1 Zusammenfassung

Beobachtung: Jede reelle Zahl ist ein Grenzwert von einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen.

Beispiel: $\sqrt{2}$



$\forall (a_n), (b_n)$ $a_n \to a, b_n \to a \iff (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge.

Deshalb:

- Definiere C.F. rationaler Zahlen
- Äquivalenzrelation:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} :\iff (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Nullfolge .}$$

  und Äquivalenzklasse:

$$\overline{R} := \{[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]\}.$$

- Eine Klasse aus $\overline{\mathbb{R}} \iff$ eine reelle Zahl

Konstruktion nach Cantor, 1873

Als nächstes: $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper mit „+ ”, „·”, „>” und ist auch „vollständig”.

2.2 Der Körper $\mathbb{R}$

Seien $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zugehörige approximierende Folgen rationaler Zahlen.

Alle Struktureigenschaften von $\mathbb{Q}$ sind über den Grenzübergang auf $\mathbb{R}$ übertragbar.

Definition 2.16 (Absolutbetrag)**.**

$$|a| := \lim_{n\to\infty} |a_n|.$$

Folglich: Begriffe „Konvergenz” und „Cauchy-Folgen” gelten auch für Folgen reeller Zahlen.

Definition 2.17 (Arithmetische Grundoperationen)**.**

$$a + b := \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n).$$

$$a \cdot b := \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)\,.$$

Definition 2.18 (Ordnungsrelation)**.**

$$a > b :\iff \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) > 0.$$

und folglich: $\exists \alpha \in \mathbb{Q}_+$ s.d. $a_n - b_n \geq \alpha$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

$$a \geq b :\iff a > b \text{ oder } a = b.$$

$$a < b :\iff b > a.$$

$$a \leq b :\iff b \geq a.$$

Definition 2.19 (Positivität)**.**

$$\mathbb{R}^+ := \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}.$$

Bemerkung 2.20. Definitionen sind unabhängig von der Wahl der Folge:

Beispiel für Absolutbetrag. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei approximierende Folgen von a, d.h. $(a_n - a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

Zu zeigen:

$$|a| = \lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} |a'_n|.$$

d.h. zu zeigen:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} |a'_n| \\ \iff &\lim_{n\to\infty} (|a_n| - |a'_n|) = 0. \end{aligned}$$

Betrachte:

$$||a_n| - |a'_n|| \leq |a_n - a'_n| < \varepsilon.$$

$\implies (|a_n| - |a'_n|)$ ist Nullfolge
$\implies |a_n| = |a'_n|$
$\implies \lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} |a'_n| = |a|$ □

Die anderen Beweise folgen analog.

Satz 2.21 (Der vollständige Körper $\mathbb{R}$)**.**

1. $(\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ ist angeordneter Körper
2. $\mathbb{Q}$ ist Unterkörper von $\mathbb{R}$
3. Der Körper $\mathbb{Q}$ ist vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.
4. Der Unterkörper $\mathbb{Q}$ ist „dicht" in $\mathbb{R}$, d.h.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists g_\varepsilon \in \mathbb{Q} \text{ s.d. } |a - q_\varepsilon| < \varepsilon.$$

Beweis. 1) Körperaxiome (Kommutativität, Assoziativität, Distributivität) sind trivial

Neutrales Element der Addition:

$$0 := 0,0\ldots \text{ Klasse der Nullfolgen z.B.: } a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}.$$

Neutrales Element der Multiplikation

$$1 := 1,0\ldots0 \qquad [(1)_{n\in\mathbb{N}}].$$

Existenz der inversen Elemente bezüglich der Addition

$$a + x = 0, a \in \mathbb{R}.$$

$$x = -a = \lim_{n\to\infty} (-a_n).$$

Existenz der inversen Elemente bezüglich der Multiplikation

$$b \cdot x = 1, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$x = \frac{1}{b} := \lim_{n\to\infty} c_n.$$

$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \ ?\ .$$

$b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies \lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$
$\implies (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge $\implies$ fast alle Elemente $b_n \neq 0$ (Übung!)

Definiere:

$$c_n := \begin{cases} 0 & b_n = 0 \\ \frac{1}{b_n} & b_n \neq 0 \end{cases}.$$

Dann $(b_n \cdot c_n) =$

$$(b_n \cdot c_n) = \begin{cases} 0 & b_n = 0 \\ 1 & b_n \neq 0 \end{cases}.$$

$\implies \lim_{n\to\infty}(b_n \cdot c_n) = 1$

2) $a \in \mathbb{Q}$ entspricht $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ mit $a_n = a\ \forall n \in \mathbb{N} \implies \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ Körper $\implies Q$ Unterkörper von $\mathbb{R}$.

3) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine C.F. reeller Zahlen.

$$\forall a_n \in \mathbb{R}\ \exists \text{ approx. Folge}(a_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}.$$

$$a_{n,m} \in \mathbb{Q}\forall n, m \in \mathbb{Q}.$$

$$a_n := \lim_{n\to\infty} a_{n,m} n \in \mathbb{N}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ wähle $k_n \in \mathbb{N}$ mit:

$$|a_n - a_{n,k_n}| < \frac{1}{n}.$$

Wir zeigen, dass $(a_{n,k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen eine C.F. ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann

$\square$

Bemerkung 2.22 (Organisatorisches)**.** Nächsten Mittwoch (20. November) findet keine Vorlesung und auch keine Plenarübung statt. Aber Mittwoch (27.11.) Vorlesung statt Plenarübung im großen Hörsaal Chemie

Satz 2.23 (Wichtiger Satz)**.** Der Körper $\mathbb{R}$ ist vollständig, d.h. jede Cauchy Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Limes

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge reeller Zahlen, d.h. $a_n \in \mathbb{R}$.

$$a_n \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : \exists \text{ C.F. } (a_{n,m}).$$

$$a_{n,m} \in \mathbb{Q}\forall n, m \in \mathbb{N}, a_n = \lim_{m\to\infty} a_{n,m}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ wähle Index $k_n \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_{n,kn}| < \frac{1}{n}.$$

k_n existiert, weil $\lim_{m\to\infty} a_{n,m} = a_n$ und damit $|a_n - a_{n,m}| \to 0$ also $\exists \varepsilon |a_n - a_{n.m}| < \varepsilon < \frac{1}{n}$ und Archimedisches Axiom.

Ziel: zu zeigen $(a_{n,k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen ist Cauchy Folge.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n, m \geq n_\varepsilon$:

$$|a_n - a_m| < \frac{1}{3}\varepsilon, |a_n - a_{n,k_n}| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{C.F.}$$

$$|a_m - a_{m,k_m}| < \frac{1}{3}\varepsilon(\text{AA}).$$

und folglich

$|a_{n,k_n} - a_{m,k_m}| \leq |a_{n,k_n} - a_n + a_n - a_m + a_m - a_{m,k_m}| \leq |a_{n,k_n} - a_n| + |a_n - a_m| + |a_m - a_{m,k_m}| < \varepsilon.$

$\implies (a_{n,k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy Folge $\implies$ Nach Konstruktion der $\mathbb{R}$ folgt, dass $\exists$ „limes' $a \in \mathbb{R}$, s.d.

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : |a_{n,k_n} - a| < \varepsilon.$$

Dann gilt für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n,k_n}| + |a_{n,k_n} - a| \leq \frac{1}{n} + |a_{n,k_n} - a| \to 0.$$

$\implies a = \lim_{n\to\infty} a_n$

$\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, d.h.

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ gilt } \forall\varepsilon > 0 \exists q_\varepsilon \in \mathbb{Q} \text{ s.d. } |a - q_\varepsilon| \leq \varepsilon.$$

Nach Konstruktion von $\mathbb{R}$ folgt:

$$\begin{gathered} \forall \text{C.F.} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Q} : \\ \exists a \in \mathbb{R} : a = \lim_{n\to\infty} a_n. \end{gathered}$$

$\implies \forall\varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \; |a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n_\varepsilon$ □

Bemerkung 2.24 (Archimedisches Axiom)**.**

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : \text{s.d.} n - a &> 0 \\ \implies \forall\varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \text{s.d. } n - \frac{1}{\varepsilon} &> 0 \\ \implies \frac{1}{n} &< \varepsilon. \end{aligned}$$

2.3 Wichtige Aussage

$\mathbb{R}$ ist vollständig, da alle C.F. in $\mathbb{R}$ haben einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.

2.4 Weitere Möglichkeiten, die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zu charakterisieren

Definition 2.25 (Maximum, Minimum, obere/untere Schranke, Supremum, Infimum)**.** Sei $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$.

Maximum:

$$\max M := b \in M : b \geq x, \forall x \in M.$$

Minimum:

$$\min M := a \in M : x \geq a, \forall x \in M.$$

Obere Schranke:

$$b \in \mathbb{R}, \text{ s.d. } b \geq x, \forall x \in M.$$

Untere Schranke:

$$a \in \mathbb{R}, \text{ s.d. } x \geq a, \forall x \in M.$$

Eine Menge M heißt nach oben (unten) beschränkt, falls eine obere (untere) Schranke von M existiert.

Supremum: kleinste obere Schranke

Infimum: größte untere Schranke

Beispiel 2.26.

- $\mathbb{N}$ ist von unten beschränkt, z.B. mit 0. $\min\mathbb{N} = 1$, von oben unbeschränkt.
- $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$: obere Schranke ist $\sqrt{2}$ und untere Schranke ist $-\sqrt{2}$, aber M besitzt kein Maximum bzw. Minimum. $\sqrt{2}$ ist Supremum und $-\sqrt{2}$ ist Infimum

Bemerkung 2.27. Falls $b = \sup M \iff$:

1. b ist eine obere Schranke von M, d.h. $\forall x \in M : x \leq b$ und
2. Jede Zahl $c < b$ ist keine obere Schranke von M, d.h. $\forall c \in M, c < b, \exists x \in M$: $c < x$ (oder $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x > b - \varepsilon$)

Analog für $a = \inf M$

Beispiel 2.28.

$$I = (a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

dann gilt $\sup I = b, \inf I = a$.

Bemerkung 2.29. Das Supremum (Infimum) muss nicht zur Menge M gehören, aber falls $\sup M \in M$, dann $\sup M = \max M$.

Satz 2.30 (Vollständigkeit in $\mathbb{R}$ Nr. 2)**.** $\mathbb{R}$ vollständig $\iff$ jede nichtleere beschränkte Teilmenge $M \in \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum bzw. Infimum

Definition 2.31 (Intervalle)**.**

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \text{ abgeschlossenes Intervall.}$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \text{ offenes Intervall.}$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \text{ halboffenes Interval.}$$

$$[a, b) \text{ analog.}$$

Definition 2.32 (Intervallschachtelung)**.** ist eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_n := [a_n, b_n] := \{x \in \mathbb{R} \mid a_n \leq x \leq b_n\}, n \in \mathbb{N}$ mit Eigenschaften. 1) $I_{n+1} \subset I_n n \in \mathbb{N}$ (bedeutet $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ 2) $\forall \varepsilon > 0, \exists I_n$ mit der Länge

$$|b_n - a_n| < \varepsilon \text{ d.h. } |b_n - a_n| \to 0, n \to \infty.$$

Satz 2.33 (Vollständigkeit in $\mathbb{R}$ Nr. 3)**.** Vollständigkeit in $\mathbb{R}$ $\iff$ Intervallschachtelungseigenschaft d.h. für jede Intervallschachtelung.

$$(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}$$

so dass

$$c = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n := \{x \in \mathbb{R} | x \in I_n \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Diese Aussage ist verwandt mit dem Axiom vom Dedekindischen Schnitt

Satz 2.34 (Trennungseigenschaft)**.** Seien $A, B \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ mit $a < b \forall a \in A, b \in B$

Dann existiert immer ein $c \in \mathbb{R}$, welches A und B trennt:

$$\forall a \in A, b \in B \text{ gilt } a \leq c \leq b.$$

Dies ist ebenfalls $\iff$ zur Vollständigkeit in $\mathbb{R}$

Lemma 2.35 (Existenz der k-ten Wurzel einer positiven reellen Zahl)**.** $\forall a \in \mathbb{R}^+ \ \forall k \in \mathbb{N}$: existiert eine positive k-te Wurzel. Das heißt die Lösung der Gleichung

$$x^k = a.$$

ist $\sqrt[k]{a}$ (Bezeichnung).

Beweis. 1) Die Eindeutigkeit der $\sqrt[k]{a}$ (falls sie existiert)

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zwei k-te Wurzeln des $a \in R^+$:

$$x_1^k = a = x_2^k.$$

Dann gilt:

$$0 = x_1^k - x_2^k = (x_1 - x_2) \underbrace{\sum_{m=0}^{k-1} x_1^{k-1-m} x_2^m}_{>0}.$$

mit dieser Hilfsformel

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k.$$

$\implies x_1 - x_2 = 0 \implies x_1 = x_2$

2) Existenz: $a = 1 \implies \sqrt[k]{1} = 1$ ($1^k = 1$) Sei $a > 1$ und Annahme, dass $\exists$ Wurzel für $0 < a' < 1$
Dann definiere:

$$\sqrt[k]{a} := \frac{1}{\sqrt[k]{\frac{1}{a}}}.$$

$$\left(\sqrt[k]{a}\right)^k = \left(\frac{1}{\sqrt[k]{a'}}\right)^k = \frac{1}{\sqrt[k]{a'}^k} = \frac{1}{a'} = a.$$

Es bleibt zu zeigen: $\exists \sqrt[k]{a}$ für $0 < a < 1$. □

Heute: Längstes deutsches Wort!

„Intervallschachtelungseigenschaft hat ganze 33 Buchstaben" meint Kostina.

Fortsetzung des Beweises vom letzten Mal. Ab jetzt: n statt k.

Zu zeigen: Es existiert eine Wurzel für $0 < a < 1$.

Definiere Menge $M := \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < 1, y^n < a\}$
$M \neq \emptyset$, weil $\frac{1}{2}a \in M$. M ist auch beschränkt, untere Schranke 0, obere Schranke 1.

Da $\mathbb{R}$ vollständig $\implies \exists \sup M =: x$.

Zu zeigen: $x^n = a$ Annahme: $x^n < a$. Wegen $(x+1) \notin M$ gilt $(x+1)^n > a$. Konstruiere:

$$\tau := \frac{\overbrace{a - x^n}^{>1}}{(x+1)^n - x^n}.$$

$$\begin{aligned}(x+\tau)^n &= x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \tau^k x^{n-k} \\ &< x^n + \tau \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \\ &= x^n + \tau((x+1)^n - x^n) \\ &\overset{\text{Def. } \tau}{=} x^n + (a - x^n) = a.\end{aligned}$$

$\implies$

$$(x+\tau)^n < a \implies (x+\tau) \in M.$$

und damit:

$$x + \tau > x \qquad \text{Widerspruch zu } x = \sup M.$$

(folgt aus der binomischen Formel: $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}$)

Annahme: $x^n > a$

Nach der Ungleichung von Bernoulli gilt für $\tau := \frac{x^n - a}{nx^n}$. $\left(0 < \tau < \frac{x^n-a}{x^n} < 1\right)$ Damit:

$$\begin{aligned}(x - \tau x)^n &= x^n(1-\tau) \geq x^n(1 - n\tau) \\ &= x^n \left(1 - \frac{x^n - a}{x^n}\right) = a.\end{aligned}$$

$\implies$ Für $y \in M$ gilt:

$$y^n < a < (x - \tau x)^n.$$

$\implies$

$$0 < (x-\tau x)^n - y^n = \underbrace{(x - \tau x - y) \sum_{k=0}^{n} (x - \tau x)^{n-1-k} y^k}_{>0}.$$

$\implies x - \tau x - y > 0$
$\implies y < x - \tau x < x \implies x - \tau x < x$ eine obere Schranke von M. Widerspruch zu $x = \sup M$

(Formel: $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$) □

Bemerkung 2.36 (Ungleichung von Bernoulli)**.** Sei $x \geq -1$, dann gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \forall n.$$

Definition 2.37 (Allgemeine rationale Potenzen)**.** $a^q, q = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}, a > 0, a \in \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$a^q = a^{\frac{r}{s}} := \left(\sqrt[s]{a}\right)^r.$$

Bemerkung 2.38.

- Regeln für das Rechnen mit Wurzeln

$$\left(\sqrt[s]{a}\right)^r = (a^{\frac{1}{s}})^r = a^{\frac{r}{s}} = (a^r)^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{a^r}.$$

- Für $a \in \mathbb{R}_+$ wird unter $\sqrt[k]{a}$ **immer** die positive k-te Wurzel verstanden.
  $\Longrightarrow$ Aussage $\sqrt{a^2} = a$ ist falsch.
  Korrekt: $\sqrt{a^2} = |a|$
  Die Gleichung $x^2 = a$ hat zwei Lösungen: $x_1 = \sqrt{a}, x_2 = -\sqrt{a}$

Bemerkung 2.39 (Reelle Potenzen)**.** $a \in \mathbb{R}_+, r \in \mathbb{R}, a^r$ - ?

$\exists (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \to r, q_n \in \mathbb{Q}$, damit:

$$a^r := \lim_{n\to\infty} a^q.$$

Noch zu überprüfen: ob der Grenzwert existiert und eindeutig ist

Beispiel 2.40. $\sqrt{2}, (q_n) = \{1.4, 1.41, 1.414, \ldots\}$

$$a^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} a_n, a_1 = a^{1.4}, a_2 = a^{1.41}, \ldots.$$

Analog über Intervallschachtelung:

$$\begin{aligned} I_1 &= [1.4; 1.5] \\ I_2 &= [1.41; 1.42] \\ I_3 &= [1.414; 1.415] \\ I_n &= [r_n, s_n]. \end{aligned}$$

$$a^{\sqrt{2}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{I_n}.$$

Alternative Definition über exp und ln

$$a^r = \exp(r \ln a).$$

und Reihenentwicklung:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

oder

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

2.5 Mächtigkeit von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

Definition 2.41 (Mächtigkeit)**.** Die Mächtigkeit einer Menge ist die Anzahl ihrer Elemente.

Eine Menge ist „unendlich", wenn eine bijektive Abbildung $f : A \to$ Echte Teilmenge von A existiert. Dann $|A| = \infty$.

Eine unendliche Menge, deren Elemente mit Hilfe der natürlichen Zahlen durchnummeriert werden kann, heißt „abzählbar (unendlich)", sonst „überabzählbar".

Abzählbarkeit heißt: Es existiert eine bijektive Abbildung $f \colon \mathbb{N} \to A$.

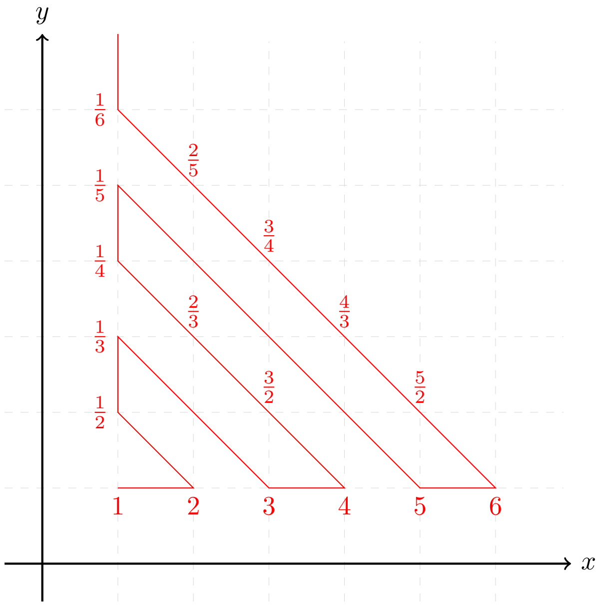
Beispiel 2.42.
- $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ dann $|A| = 3$
- $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sind unendliche Mengen

Satz 2.43 (Abzählbarkeit)**.** $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar, $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

$\mathbb{Z}$ Abzählbar. $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, weil $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $z_n = \frac{1}{2}n$ für n gerade und $z_n = \frac{1}{2}(1-n)$ für n ungerade ist eine Abzählung von $\mathbb{Z}$. □

$\mathbb{Q}$ Abzählbar. Argumentation nach Cantor

$p \in \mathbb{Q}$, $q = \frac{n}{m}$



Hier werden Punkte ausgelassen, für die n und n nicht teilerfremd sind. Die Gitterpunkte werden durchnummeriert $\implies \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, \ldots\}$. □

$\mathbb{R}$ ist überabzählbar. Wir zeigen, dass $[0,1)$ nicht abzählbar ist.

Angenommen: $[0,1)$ ist abzählbar, dann sei $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung, z.B.:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, d_{11}d_{12}d_{13}\ldots \\ z_2 &= 0, d_{21}d_{22}d_{23}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dann Zahl $y := 0, d_1 d_2 d_3, \ldots$ mit

$$d_n := \begin{cases} 2 & \text{falls } d_{nn} = 1 \\ 1 & \text{falls } d_{nn} \neq 1 \end{cases}$$

liegt in $[0,1)$, $d_i \neq 9 \forall i$, aber $y \notin \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, denn falls $y = z_k$ für ein $k \implies$

$$y = 0, d_{k1}, d_{k2}, d_{k3}, \ldots, d_{kk}, \ldots.$$

aber $d_k \neq d_{kk}$ nach Konstruktion. □

2.6 Die Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{z = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Addition in $\mathbb{C}$: $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$, $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$:

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Multiplikation in $\mathbb{C}$:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Satz 2.44 ($\mathbb{C}$ ist ein Körper)**.** Körperaxiome gelten (nachrechnen!)

Nullelement $0 := (0,0)$
Einselement $1 := (1,0)$
Imaginäre Einheit $i := (0,1)$ mit $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$

Inverse der Addition $-z := (-x,-y)$
Inverse der Multiplikation $z^{-1} := \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Schreibweise / Normaldarstellung
$z = (x,y)$ oder $z = x + iy$ mit $i^2 = -1$.

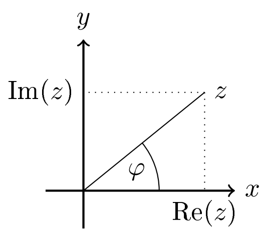
Bemerkung 2.45 (Rechnen in $\mathbb{C}$)**.**

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i^2y_1y_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2).$$

Definition 2.46. Für $z = (x,y) = x + iy \in \mathbb{C}$ heißt

$x = \mathrm{Re}(z)$ Realteil von z
$y = \mathrm{Im}(z)$ Imaginärteil von z

$|z| := \sqrt{x^2+y^2}$ Betrag von z
$\overline{z} := x - iy = (x,-y)$ zu z konjugierte komplexe Zahl



$\mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\varphi)$
$\mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\varphi)$
$\Longrightarrow\ z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ mit $r = |z|$.

Bemerkung 2.47. Rechenregeln für komplexe Zahlen

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{i}{2}(z-\overline{z})$
3. $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \iff z = 0$
4. $|\overline{z}| = |z|$
5. $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$
6. $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

Reelle Zahlen: $z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff z = \overline{z}$

Dies führt zur weiteren Darstellung komplexer Zahlen mit Hilfe von sin und cos.

Polardarstellung

(a)
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad r = |z|.$$

Bsp.: $i = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(b) Definiere $e^{iy} := \cos y + i\sin y \qquad y \in \mathbb{R}$. Es folgt eine *Exponentialdarstellung.*
$$z = r \cdot e^{i\varphi} \text{ mit } r = |z| \quad \varphi = \operatorname{Arg}(z).$$

Satz 2.48 (Vorteil der Exponentialdarstellung)**.** Für $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$$z_k = r_k e^{i\varphi_k} \qquad k = 1,2 \text{ gilt}$$

(a) $\overline{z} = r \cdot e^{-i\varphi}$

(b) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

(c) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

(d) $z^n = r^n e^{in\varphi}$
insbesondere gilt die Formel von de Moivre:
$$\left(e^{i\varphi}\right)^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = e^{in\varphi}.$$

Beweis. (a) $\overline{z} = \overline{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = r \cdot e^{-\varphi}$

(b)
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) + i\left((\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)\right) \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}. \end{aligned}$$

(c) folgt aus 2

(d) folgt aus 2

□

tolle Grafik von der Kostina, die gibt's nur in der Vollversion.

Bemerkung 2.49 (Beobachtungen)**.** 1. $e^{i\varphi} = 1 \iff \varphi \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis. durch Behauptung. □

2. $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \iff \varphi_1 - \varphi_2 \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Satz 2.50 (n-te Wurzel in $\mathbb{C}$)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \neq w = re^{i\varphi}$ hat die Gleichung $z^n = w$ genau n verschiedene Lösungen.
$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\varphi+2\pi k)\cdot\frac{1}{n}} \qquad k = 0,1,\dots,n-1.$$

Beweis. Sei $z = \rho e^{i\psi}$. Dann:

$$
\begin{aligned}
& z^n = \rho^n e^{in\psi} \overset{!}{=} re^{i\varphi} = w \\
\iff & \rho^n = r \text{ und } n\psi = \varphi + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z} \\
\iff & \rho = \sqrt[n]{r} \text{ und } \psi = \frac{1}{n}(\varphi + 2\pi k) \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Betrachte: $z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\psi_k}, \psi_k = \frac{1}{n}\left(\varphi + 2\pi k\right), k = 0, 1, \ldots, n-1$

1. Alle z_k sind paarweise verschieden (klar).
2. Wir zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt. Sei z eine beliebige Lösung $z^n = w$ und $z = |z| \cdot (\cos\psi + i\sin\psi)$. Es gilt $|z|^n = |w|$ und folglich $|z| = \sqrt[n]{|w|} = \sqrt[n]{r}$.

   Weiterhin ist $n\psi = \varphi + 2\pi l$ für ein $l \in \mathbb{Z}$ (wegen $(e^{i\psi})^n = e^{in\psi}$), dann $\psi = \frac{\varphi}{n} + l\frac{2\pi}{n}$.

   Teile l durch n mit Rest: $l = k + s \cdot n$.

   $$\frac{l}{n} = s + \frac{k}{n}, s \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n-1.$$

   Dann

   $$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}(k + sn) = \underbrace{\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)}_{\psi_k} + 2\pi s.$$

   $\implies z = z_k, 0 \leq k \leq n-1$
   $\implies$ Alle Lösungen gefunden

$\square$

Bemerkung 2.51 (Geometrische Interpretation)**.** Die Lösungen sind die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks auf dem Kreis mit Radius $|z| = \sqrt[n]{r}$.

Im Fall $w = 1$ heißen z_k die n-ten Einheitswurzeln.

Beispiel 2.52. Die dritten Einheitswurzeln sind

$$
\begin{aligned}
& \left\{e^{i2k\pi\frac{1}{3}}, k = 0, 1, 2\right\} \\
= & \left\{\cos\left(k\frac{2\pi}{3} + i\sin(k\frac{2\pi}{3}, k = 0, 1, 2\right)\right\} \\
= & \left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.
\end{aligned}
$$

Kapitel 3

Folgen und Reihen

3.1 Folgen

Definition 3.1 (Folgen)**.** Eine Zahlenfolge ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$, d.h. $n \mapsto a_n \in \mathbb{R}$.

Die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wobei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen ist, die streng monoton wächst, d.h. $n_1 < n_2 < \ldots$. bzw. $n_k < n_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$.

Beispiel 3.2. $(-1)^n$ hat zwei Teilfolgen: $(-1)^{2n} = 1$ und $(-1)^{2n+1} = -1$.

Definition 3.3 (Konvergenz, Beschränktheit, Monotonie von Folgen)**.**

1. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $|a_n| \leq C$.

   Sie heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt falls $\exists C \in \mathbb{R}$, s.d. $a_n \leq C$(bzw. $a_n \geq C$)$\forall n \in \mathbb{N}$

2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt monoton wachsend (fallend), wenn $a_n \leq a_{n+1}$ $(a_n \geq a_{n+1})$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$.

3. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, s.d.

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

4. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt divergent, falls sie gegen keine reelle Zahl konvergiert.

Bemerkung 3.4.

1. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ falls in jeder ε-Umgebung $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ fast alle Folgenelemente liegen.

2. In Def. kann auch $\leq \varepsilon$ und statt ε kann man $\frac{1}{N}$ für beliebig große $N \in \mathbb{N}$ schreiben.

Satz 3.5. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn sie Cauchy-Folge ist, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall n, m \geq n_\varepsilon$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Satz 3.6 (Eindeutigkeit des Limes)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a, a' \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a'$, dann gilt $a = a'$.

Beweis. Angenommen $a \neq a'$. Definiere $\varepsilon := \frac{|a-a'|}{2} > 0$.

Dann $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$ und $|a_n - a'| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2$.

Dann gilt $\forall n \geq \max\{n_1, n_2\}$:

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < \varepsilon + \varepsilon = |a - a'|.$$

$\implies |a - a'| < |a - a'|$. Widerspruch $\implies a = a'$ □

Satz 3.7. Konvergente Folgen sind beschränkt.

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \to a, n \to \infty, a \in \mathbb{R}$.

Wähle $\varepsilon = 1$. Dann $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1 \quad \forall n \geq n_\varepsilon$.

Dann gilt $\forall n \geq n_\varepsilon$:

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|.$$

$$\implies |a_n| \leq \left(\max_{k=1,\ldots,n_\varepsilon} |a_k|\right) + |a| + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Satz 3.8 (Konvergenz und Nullfolgen)**.** Eine Nullfolge ist eine Folge, die gegen Null konvergiert. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Dann sind äquivalent:

1. $a_n \to a, n \to \infty$
2. $(a_n - a) \to 0$
3. $|a_n - a| \to 0$

Beweis. durch Behauptung. □

Satz 3.9 (Konvergenz von Teilfolgen)**.** Teilfolgen einer gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergierenden Folge konvergieren ebenfalls gegen $a \in \mathbb{R}$.

Beweis. trivial. □

Satz 3.10 (Einschließungskriterium (Sandwich))**.** Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ und $\lim_{n\to\infty} c_n = c$.

1. Falls $a_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies a \leq c$.
2. Falls $a = c$ und $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies b = a \implies \lim_{n\to\infty} b_n = a$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$.

1. $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|c_n - c| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_\varepsilon$.
   Dann: $a - c \leq a - (a_n - c_n) - c \leq |a - a_n| + |c_n - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$
   $\implies \forall \varepsilon > 0$ gilt $a - c < \varepsilon \implies a - c \leq 0$

2. $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ und $|c_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$
   Dann gilt $\forall n \geq n_\varepsilon$ und wegen $|a_n| \leq |b_n| \leq |c_n|$:

$$-\varepsilon < -|a_n - a| \leq a_n - a \leq b_n - a \leq c_n - a \leq |c_n - a| < \varepsilon.$$

   $\implies -\varepsilon < b_n - a < \varepsilon \implies |b_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$
   $\implies \lim_{n\to\infty} b_n = a$

□

Satz 3.11 (Rechenregeln für konvergente Folgen)**.** Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

1. $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$
2. $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$
4. Falls $b \neq 0$, gilt $b_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.
5. Falls $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies a \geq 0$ und $(a_n)^{\frac{1}{k}} \to a^{\frac{1}{k}}, n \to \infty$.

Beweis. durch Zurückblättern. □

Satz 3.12 (monoton + beschränkt $\implies$ konvergent)**.** Eine monoton wachsende (fallende) nach oben (unten) beschränkte Folge konvergiert gegen ihr Supremum:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = \min\{c \in \mathbb{R} | a_n \leq c\}.$$

bzw. ihr Infimum:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n := \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \max\{c \in \mathbb{R} \mid a_n \geq c\}.$$

Beweis. Gegeben $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Definiere $s := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Z.z.: $a_n \to s$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann $s - \varepsilon$ keine obere Schranke, d.h. $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $s - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}$.

Damit $s - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq s < s + \varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$
$\implies |a_n - s| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon \implies a_n \to s$

□

Satz 3.13 (Bolzano-Weierstraß)**.** Jede beschränkte Folge besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, d.h. $\exists a, b \in \mathbb{R}$, s.d. $a \leq a_n \leq b$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Konstruiere induktiv eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_k := [a_k, b_k]$ mit:

(1) I_k enthält unendlich viele Folgenelemente von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) $I_k \subset I_{k-1}\ \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$

(3) $(b_k - a_k) \leq 2^{1-k}(b_1 - a_1)\ \forall k \in \mathbb{N}$

Für $k = 1$ wähle $a_1 := a$, $b_1 := b$.
$k \to k+1$: Intervall $I_k := [a_k, b_k]$ mit Eigenschaften (1)-(3) sei konstruiert.

Berechne $M := \frac{a_k+b_k}{2}$ (Mitte des Intervalls I_k). Wegen (1): $[a_k, M]$ oder $[M, b_k]$ enthält unendlich viele Folgenelemente.

Setze:

$$I_{k+1} := \begin{cases} [a_k, M] & \text{falls } [a_k, M] \text{ unendlich viele Folgenelemente enthält} \\ [M, b_k] & \text{falls } [M, b_k] \text{ unendlich viele Folgenelemente enthält} \end{cases}$$

in beiden Fällen:

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2} \overset{(3)}{\leq} \frac{1}{2} 2^{1-k}(b_1 - a_1) = 2^{-k}(b_1 - a_1).$$

$\implies$ (1) - (3) erfüllt für I_{k+1}.

Wir definieren eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \in I_k\ \forall k \in \mathbb{N}$:
$k = 1$: Setze $a_{n_1} := a, n_1 := 1$.
$k \to k+1$: Wegen (1) ex. ein Index $n_{k+1} > n_k$ mit $a_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$.

I_k bilden eine Intervallschachtelung:

$$\implies \underbrace{a_k}_{\to a} \leq a_{n_k} \leq \underbrace{b_k}_{\to a} \overset{\text{Sandwich}}{\implies} a_{n_k} \to a, k \to \infty.$$

□

Beispiel 3.14. $a_n = (-1)^n$. Teilfolge: $(1, 1, 1, 1, \ldots) \to 1$, $(-1, -1, -1, \ldots) \to -1$.

Definition 3.15 (Häufungspunkt)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann heißt $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt der Folge, falls $\forall \varepsilon > 0$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 3.16.
1. $a_n = (-1)^n$ hat zwei Häufungspunkte 1 und -1.
2. Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dann ist a Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung 3.17. Zu jedem Häufungspunkt a ex. eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert, also $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$:

$$a \text{ Häufungspunkt} \iff a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \text{ für eine } (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}.$$

Beweis. (i) „$\implies$": Sei a Häufungspunkt (HP). Wähle $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_1} \in D_1(a) = \{x \mid |x-a| < 1\}$.

Sei $n_1, \ldots, n_{k-1}$ bereits gewählt.
Wähle $n_k > n_{k-1}$, s.d. gilt:

$$a_{n_k} \in D_{\frac{1}{k}}(a) = \left\{x \mid |x - a| < \frac{1}{k}\right\}.$$

Dann ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$.
$\implies a_{n_k} \to a, k \to \infty$.

(ii) „ $\Longleftarrow$ ": Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.
Zu zeigen: a ist HP.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall k \geq k_\varepsilon$ gilt:

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon \implies \forall k \geq k_\varepsilon \quad a_{n_k} \in D_\varepsilon(a).$$

□

Bemerkung 3.18. Satz von Bolzano-Weierstraß besagt, dass jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ mindestens einen HP besitzt.

Definition 3.19 (Limes Superior)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, dann definiere eine reelle Folge $(s_n)_{n\in N}$ durch $s_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\}$.

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend. Ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt, dann definiere

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt ist, setzte $\lim_{n\to\infty} \sup a_n := +\infty$.

Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, aber $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht* nach unten beschränkt ist, setze $\lim_{n\to\infty} \sup a_n := -\infty$.

Beispiel 3.20.
1. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \implies \lim_{n\to\infty} \sup a_n = a$.
2. $\lim_{n\to\infty} \sup\,(-1)^n = \lim_{n\to\infty} \sup\,\{(-1)^k \mid k \geq n\} = 1$
3. $\lim_{n\to\infty} \sup n = +\infty$
   $\lim_{n\to\infty} \sup\,(-n) = -\infty$

Definition 3.21 (Limes Inferior)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann setze:

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n := -\lim_{n\to\infty} \sup\,(-a_n).$$

Beispiel 3.22.
1. $\lim_{n\to\infty} \sup\,(n^2) = +\infty$
   $\lim_{n\to\infty} \inf\,(n^2) = -\lim_{n\to\infty} \sup\,\{-k^2 \mid k \geq n\} = -\lim_{n\to\infty}(-n^2) = +\infty$
2. $$a_n := \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}.$$
   $(a_n) = (0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots)$
   $\lim_{n\to\infty} \inf a_n = 0$
   $\lim_{n\to\infty} \sup a_n = +\infty$

Satz 3.23 (Charakterisierung von lim sup und lim inf)**.** Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.

1. $\lim_{n\to\infty} \sup a_n = a \in \mathbb{R} \iff$
   $\forall \varepsilon > 0$ gilt:
   (i) $a_n < a + \varepsilon$ für fast alle $n \in N$.
   (ii) $a_n > a - \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

2. $\lim_{n\to\infty} \inf a_n = a \in \mathbb{R} \iff$
   $\forall \varepsilon > 0$ gilt:
   (i) $a_n > a - \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$
   (ii) $a_n < a + \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.
3. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn:
$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \lim_{n\to\infty} \inf a_n = a \in \mathbb{R}.$$
   In diesem Fall gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Bemerkung 3.24. Satz 3.23 impliziert:
$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \sup \{\text{HP von}(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$$
$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = \inf \{\text{HP von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}.$$

$\forall \varepsilon > 0$ liegen unendlich viele Folgenelemente im offenen Intervall
$$\left(\lim_{n\to\infty} \sup a_n\right) - \varepsilon < a_n < \left(\lim_{n\to\infty} \sup a_n\right) + \varepsilon \qquad (1 \text{ (i) (ii)}).$$
bzw.
$$\left(\lim_{n\to\infty} \inf a_n\right) - \varepsilon < a_n < \left(\lim_{n\to\infty} \inf a_n\right) + \varepsilon \qquad (2 \text{ (i) (ii)}).$$
Fast alle Folgenelemente erfüllen:
$$\left(\lim_{n\to\infty} \inf a_n\right) - \varepsilon < a_n < \left(\lim_{n\to\infty} \inf a_n\right) + \varepsilon \qquad (1 \text{ (i) und } 2 \text{ (i)}).$$

3.2 Konvergenz in $\mathbb{C}$

Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen ($z_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$) konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$, falls $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, s.d. $|z_n - z| < \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon$

Genauso wird die Beschränktheit und Begriff der C.F. übertragen.

Aus Definitionen:
$$|z| := \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}.$$
und der Ungleichung:
$$\max(|x|, |y|) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
folgt:

1. $z_n \to z, n \to \infty$ in $\mathbb{C} \iff \mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z)$
2. $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine C.F. in $\mathbb{C} \iff$
   $(\mathrm{Re}(z_n))_n$ und $(\mathrm{Im}(z_n))_n$ sind C.F. in $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{C}$ ist vollständig, d.h. jede C.F. in $\mathbb{C}$ ist konvergent.
4. Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beispiel 3.25. 1. $\frac{1+i(n+1)}{n} = \frac{1}{n} + i\left(1+\frac{1}{n}\right) \to i,\, n \to \infty$

2. $z_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n = \left(\frac{i}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{i}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$
   $|z_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0,\, n \to \infty$

3. $q^n \to 0,\, n \to \infty\ \forall q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$.

3.3 Unendliche Summe („Reihen")

Definition 3.26. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Wir betrachten die Folge der n-ten Partialsumme $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch:

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert (divergiert), wenn die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (divergiert).

Im Fall von Konvergenz bezeichnet:

$$s_\infty := \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

die Summe oder den Wert der Reihe.

Bemerkung 3.27. Man kann auch Reihen $\sum_{k=l}^{\infty} a_k$ mit $l \in \mathbb{Z}$ betrachten.

Beispiel 3.28 (Geometrische Reihe)**.**

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots .$$

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert genau für alle $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Beweis. Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}.$$

Für $|q| < 1$ gilt $|q|^{n+1} \to 0,\, n \to \infty$

$$\implies s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1.$$

Bleibt zu zeigen: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergent für $|q| \geq 1$.

Angenommen $\exists q \in \mathbb{C}$ mit $|q| \geq 1$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Dann

$$|q|^{n+1} = |\underbrace{s_{n+1}}_{\to s_*} - \underbrace{s_n}_{\to s_*}|.$$

Widerspruch, da $|q|^{n+1} \geq 1$ für $|q| \geq 1$ □

Lemma 3.29. Ist $\sum_k^\infty a_k$ konvergent, dann ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Beweis. $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n \to s_\infty - s_\infty = 0,\ n \to \infty$ □

Bemerkung 3.30. Die Eigenschaft von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge zu sein, reicht nicht für die Konvergenz von $\sum_{k=1}^\infty a_k$ aus!

Beispiel 3.31 (Harmonische Reihe)**.**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \qquad \text{ist strikt divergent.}$$

Beweis. Folge der Partialsummen ist unbeschränkt:

$$\begin{aligned} S_{2^m} &= \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \\ &= \underbrace{1}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^m}}_{\geq 2^{m-1}\cdot\frac{1}{2^m} = \frac{1}{2}} \geq \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.32.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k.$$

a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots = 0.$$

b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots = 1 + 0 + 0 = 1$$

c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}.$$

Alles Falsch (Kostina: „Alles Schrot!”), weil $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k$ divergent.

3.3.1 Konvergenzkriterien

Die Konvergenz einer Reihe ist nichts anderes als die Konvergenz der Folge der Partialsummen.

Satz 3.33. 1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_\infty \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_\infty.$$

$\Longrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda a_\infty + \mu b_\infty \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

2. Ist $a_k \in \mathbb{R}$ mit $a_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ dann gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Longleftrightarrow$ $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt.

Beweis. (1) folgt aus der linearen Kombination von Folgen.
(2) Falls $a_k \geq 0 \implies$ Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

Für solche Folgen gilt: Konvergenz $\Longleftrightarrow$ Beschränktheit □

Satz 3.34 (Leibniz-Kriterium)**.** Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende reelle Nullfolge, so ist die alternierende Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots.$$

konvergent mit folgender Abschätzung:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k\right| \leq |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Aus Voraussetzungen: $a_k \geq 0$, $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$.

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} \overset{a_{2n}\geq a_{2n+1}}{\geq} s_{2n-1}.$$

Folge mit ungeraden Indizes: $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \dots$.

$$s_{2n} = s_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n} \leq s_{2n-2}.$$

Folge mit geraden Indizes: $\dots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$

$s_{2n} > s_{2n+1}$ $(s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1})$
$s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \to 0$, $n \to \infty$

$s_1 \geq s_3 \leq s_5 \leq \dots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$

$\Longrightarrow$ $[s_{2n+1}, s_{2n}]$ bilden eine Intervallschachtelung, d.h.

$$\exists s_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty}[s_{2k+1}, s_{2k}].$$

$s_\infty = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$

$$s_{2n+1} \leq s_\infty \leq s_{2n}.$$

Damit gilt $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq s_\infty - s_{2n+1} \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1}.$$

und

$$0 \geq s_\infty - s_{2n} \geq s_{2n+1} - s_{2n} = -a_{2n+1} \geq -a_{2n}.$$

$\Longrightarrow$

$$0 \leq |s_\infty - s_n| \leq a_n \to 0 \quad n \to \infty.$$

und

$$\left| \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}_{s_\infty} - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq a_n.$$

□

Beispiel 3.35 („Alternierende harmonische Reihe”)**.**

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots.$$

ist konvergent

Definition 3.36. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispiel 3.37. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ ist konvergent nach Leibniz Kriterium, aber nicht absolut konvergent, weil $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Satz 3.38. Aus absoluter Konvergenz einer Reihe folgt deren Konvergenz.

Beweis. Sei $\sum_k a_k$ absolut konvergent, d.h. $\sum_k |a_k|$ konvergiert.

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, t_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Dann gilt für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$.

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = t_m - t_n = |t_m - t_n|.$$

Da $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\Longrightarrow$ $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist C.F.

Aus $|s_m - s_n| \leq |t_m - t_n| < \varepsilon$

$$\Longrightarrow (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist auch C.F. in } \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}$$
$$\Longrightarrow \sum_k a_k \quad \text{konvergiert.}$$

□

Satz 3.39 (Majoranten Kriterium)**.** Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine reelle Reihe ($b_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$).

(i) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent und gilt $|a_n| \leq b_n$ ($a_n \in \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$) für fast alle $n \in \mathbb{N}$ (d.h. $\forall n \geq N_0$), so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt Majorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent und $a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \geq |b_n|$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die reelle Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt Minorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis. (i) $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}, (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Partialsummen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann

$$|s_n - s_m| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} b_k = |t_n - t_m|.$$

$\implies (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist C.F.
$\implies (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(ii) Ann. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergente Majorante zu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert. Widerspruch.

□

Beispiel 3.40. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$.

$$2^n = (1+1)^n \geq 1+n \quad \forall n \implies \frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{1+n} < 1 \quad \forall n.$$

$\implies$

$$\frac{n}{4^n} \leq \frac{n}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^n} \quad \forall n.$$

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ konvergente Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ist divergent, weil $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ ($\sqrt{n} \geq 1$) $\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergente Minorante.

Satz 3.41 (Quotientenkriterium)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $|a_n| \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$($a_n \in \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$).

(i) Falls ein $0 < q < 1$ existiert mit

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0,$$

dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(ii) Falls $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1 \quad \forall n \geq N_0$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Kostina glaubt, dass das so stimmt, aber offensichtlich ist sie sich nicht sicher.

Beweis. (i) $\forall n \geq N_0$ gilt:

$$|a_n| \leq q|a_{n-1}| \leq \ldots \leq q^{n-N_0}|a_{N_0}|.$$

$\implies \frac{|a_{N_0}|}{q^{N_0}} \sum_{n=1}^{\infty} q^n$ ist konvergente Majorante.

(ii) $|a_n| \geq |a_{n-1}| \geq \ldots \geq |a_N| \implies (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

□

Beispiel 3.42 (Exponentialreihe)**.** $\forall z \in C$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} =: \exp(z) \text{ oder } e^z.$$

Zahl $e := \exp(1)$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ absolut konvergent, für alle $z \in \mathbb{C}$.

$$a_n := \frac{z^n}{n!} \implies \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{n!}} = \frac{|z|}{n+1}.$$

Für $n \geq 2|z|$ gilt:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z|}{n+1} \leq \frac{1}{2} =: q < 1.$$

Satz 3.43 (Wurzelkriterium)**.** Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe ($a_n \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

(i) Falls $\exists \quad 0 < q < 1$ und $N_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \quad \forall n \geq N_0,$$

so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(ii) Falls $\exists N_0$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ $\forall n \geq N_0$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis. 1. Für $n \geq N_0$ ist $|a_n| \leq q^n \implies$ konvergente Majorante

2. $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \implies |a_n| \geq 1 \implies (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge $\implies$ Divergenz.

□

Bemerkung 3.44. Im Quotientenkriterium und Wurzelkriterium wird gefordert:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ bzw. } \sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1.$$

Die Forderung $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ bzw. $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ reicht nicht: Bsp.: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent.

Satz 3.45 (Verdichtungskriterium von Cauchy)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}_+$, eine reelle, positive monoton fallende Nullfolge. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konvergent.}$$

Beweis. durch Übung. □

Beispiel 3.46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

1. $\alpha \leq 0$: $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge $\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ divergent.

2. $\alpha > 0$:

$$\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

eine monoton fallende Nullfolge mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} (\underbrace{2^{1-\alpha}}_{=:q})^k = \sum_{k=1}^{\infty} q^k.$$

mit $q = 2^{1-\alpha}$

Falls $|q| < 1 \iff$ konvergenz
d.h. $\alpha > 1 \iff$ konvergenz

3.4 Umordnen von Reihen

Definition 3.47 (Umordnung). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung.

Dann heißt $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = a_{\tau(1)} + a_{\tau(2)} + \dots$ eine Umordnung der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beispiel 3.48.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \text{ konvergiert.}$$

Umordnung:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}}_{>4\frac{1}{15}>\frac{1}{4}} - \frac{1}{8}$$

$$+ \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \dots + \frac{1}{2^n+2^n-1}\right)}_{>2^{n-1}\frac{1}{2^{n+1}-1}>\frac{1}{4}} - \frac{1}{2n+2}.$$

divergiert!

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, deshalb kann eine Umordnung die Konvergenzeigenschaften drastisch ändern !!!

Satz 3.49 (Umordnungssatz). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe.

Dann konvergiert jede Umordnung dieser Reihe absolut gegen denselben Grenzwert.

Beweis. Forster. □

Bemerkung 3.50. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine reelle Reihe, welche konvergiert, aber nicht absolut, so gibt es zu jedem $c \in \mathbb{R}$ oder $c = \pm\infty$ eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$, welche gegen $c \in \mathbb{R}$ konvergiert (oder divergiert).

3.5 Das Cauchy-Produkt von Reihen

Satz 3.51 (Cauchy-Produkt). Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei c_n definiert durch

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent mit $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$

Beweis. Forster. □

Bemerkung 3.52. Die Voraussetzung der absoluten Konvergenz ist wichtig:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ mit } a_n := b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

konvergieren, aber ihr Cauchy-Produkt:

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

divergiert

Beweis. durch Übung. □

Beispiel 3.53. Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Beweis.

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}.$$

Bilde Cauchy-Produkt

.

$$\begin{aligned} c_n &:= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}(x+y)^n. \end{aligned}$$

□

Korrolar 3.54. (i) $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt $(\exp(z))^{-1} = \exp(-z)$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) > 0$

(iii) $\forall n \in \mathbb{Z}$ ist

$$\exp(n) = e^n = \begin{cases} e \cdot e \cdot \ldots \cdot e & n > 0 \\ e^{-1} \cdot e^{-1} \cdot \ldots \cdot e^{-1} & n < 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}.$$

Beweis. (i) $\exp(-z) \cdot \exp(z) = \exp(-z+z) = \exp(0) = 1$

(ii) Für $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ ist $\exp(z) = 1 + x + \ldots > 0$
Für $x < 0$ ist $(\exp(x))^{-1} = (\exp(-x)) > 0 \implies \exp(x) > 0$.

(iii) Zz.: $\exp(n) = e^n \ \forall n \in \mathbb{N}$
Vollständige Induktion:
$n = 1 : \exp(1) = e$ nach Definition
$n \to n+1 : \exp(n+1) = \exp(n) \cdot \exp(1) = e^n \cdot e = e^{n+1}$
Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$ gilt:
$(\exp(n))^{-1} = \exp(-n) = e^{-n} \implies \exp(n) = e^n$

□

3.6 Potenzreihen

Definition 3.55. Eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, z \in \mathbb{C}.$$

$a_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}_0$

Beispiel 3.56 (Exponentialreihe). $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ mit Entwicklungspunkt $0 \in \mathbb{C}$ konvergiert für $\forall z \in \mathbb{C}$.

Definition 3.57 (Konvergenzradius). Zur Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ definiere den Konvergenzradius ρ durch

$$\rho := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Satz 3.58. (i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konvergiert absolut $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \rho$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ divergiert für $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > \rho$

(iii) für $|z - z_0| = \rho$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

Beispiel 3.59. für Aussage (iii)

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} x^k}_{\text{divergent für } |x|=1} \qquad \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}}_{\text{div für } x=1, \text{ konv für} x=-1} \qquad \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}}_{\text{konvergent für } |x|=1}.$$

$\rho = 1$ für alle Reihen.

Kapitel 4

Funktionen und Stetigkeit

Definition 4.1 (Funktion)**.** Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge. Eine reellwertige oder komplexwertige Funktion auf D ist eine Abbildung:

$$f : D \to \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad f : D \to \mathbb{C}.$$

Für zwei Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$(oder $\mathbb{C}$) definieren wir

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x) + g(x)\\ (f-g)(x) &:= f(x) - g(x)\\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x)\\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)}.\end{aligned}$$

4.1 Grenzwerte bei Funktionen

Definition 4.2 (Berührpunkt)**.** Sei $D \subset \mathbb{R}$. Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt Berührpunkt von D, falls in jeder δ-Umgebung von a, d.h.

$$U_\delta(a) :=]a-\delta, a+\delta[= (a-\delta, a+\delta).$$

mindestens ein Punkt von D liegt, d.h.

$$]a-\delta, a+\delta[\cap D \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0.$$

Beispiel 4.3.

1. $a \in D \implies a$ Berührpunkt von D
2. $D =]0,1[$, 0 ist Berührpunkt von D, denn $\forall \delta > 0 \ ]-\delta, \delta[\cap]0,1[\neq \emptyset$, da $\delta > 0$
3. $D = [1,2], 0$ ist kein Berührpunkt von D, denn z.B. für $\delta = \frac{1}{2}$:

$$]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\cap[1,2] = \emptyset.$$

Lemma 4.4 (Äquivalente Definition von Berührpunkten)**.** a ist ein Berührpunkt von D $\iff$ $\exists$ Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Beweis. durch Behauptung □

Definition 4.5 (Grenzwert bei Funktionen)**.**

1. Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und x_0 sei ein Berührpunkt von D. f hat in x_0 den Grenzwert (oder limes), $y_0 \in \mathbb{R}$, falls
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \colon |f(x) - y_0| < \varepsilon \quad \forall x \in D, |x - x_0| < \delta.$$
Schreibweise:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0.$$
y_0 ist eindeutig bestimmt.
y_0 kann von D abhängig sein und man schreibt daher zur Verdeutlichung ein $x \in D$ darunter.

2. Sei x_0 ein Berührpunkt von $D \cap \,]x_0, \infty[$. Dann hat f in x_0 den rechtsseitigen Grenzwert y_0 hat, falls
$$\lim_{x\to x_0} x \in D \cap]x_0, \infty[f(x) = y_0.$$
Schreibweise
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = y_0$$
$$\lim_{x\searrow x_0} f(x) = y_0.$$

3. Sei x_0 ein Berührpunkt von $D \cap]-\infty, x_0[$. Dann hat f in x_0 den linksseitigen Grenzwert y_0, falls
$$\lim_{x\to x_0} x \in D \cap]x_0, \infty[f(x) = y_0.$$
Schreibweise:
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = y_0$$
$$\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = y_0.$$

Beispiel 4.6 (Heaviside Funktion)**.** $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, def. durch
$$H(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$
Für $x_0 > 0$ gilt $\lim_{x\to x_0} H(x) = 1$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, wähle $\delta := \frac{x_0}{2} > 0$. Dann gilt
$$|H(x) - 1| = 0 < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R} \cap \,]x_0 - \frac{x_0}{2}, x_0 + \frac{x_0}{2}[.$$
□

Analog finden wir, dass für $x_0 < 0$ gilt $\lim_{x\to x_0} H(x) = 0$.

$\lim_{x\to 0} H(x)$ existiert nicht!

Beweis. Angenommen: $\lim_{x\to 0} H(x) = y_0$.

Dann wählen wir $\varepsilon = \frac{1}{4}$, dann ex. $\delta > 0$ mit

$$|H(x) - y_0| < \frac{1}{4} \quad \forall x \text{ mit } x \in]-\delta, \delta[.$$

$\implies 1 = |H(-\delta) - H(\delta)| \le |H(-\delta) - y_0| + |y_0 - H(\delta)| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ Widerspruch!
$\implies \lim_{x\to 0} H(x)$ existiert nicht. □

Es gibt $\lim_{x\nearrow 0} H(x) = 0$ und $\lim_{x\searrow 0} H(x) = 1$, weil

$$\begin{aligned} |H(x) - 0| &= 0 \quad \forall x \in]-\delta, 0[\\ |H(x) - 1| &= 0 \quad \forall x \in]0, \delta[. \end{aligned}$$

Lemma 4.7 (Restgliedabschätzung der Exponentialreihe)**.**

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}(x).$$

, d.h.

$$R_{n+1}(x) := \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Für $R_{n+1}(x)$ gilt

$$|R_{n+1}(x)| \le 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}, \quad \forall |x| \le \frac{N+2}{2}, N \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} |R_{n+1}(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| &= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left(1 + \frac{|x|}{N+2} + \frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)} + \dots \right) \\ &\le \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left(1 + \frac{|x|}{N+2} + \left(\frac{|x|}{N+2} \right)^2 + + \left(\frac{|x|}{N+2} \right)^3 + \dots \right) \\ &\le \frac{|x|^{n+1}}{(N+1)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) \\ &= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k \\ &= 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}. \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.8.

$$\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{4}$. Dann gilt $\forall x \in \left]-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right[$, wobei O.B.d.A. $\frac{\varepsilon}{4} < 1$, dass

$$|\exp(x) - 1| = |R_{0+1}| \leq 2 \cdot \frac{|x|^{0+1}}{(0+1)!} = 2|x| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Lemma 4.9 (Folgenkriterium)**.** Sei $f \colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und x_0 ein Berührpunkt von D. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \quad \iff \quad \forall \text{ Folgen } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0.$$

Beweis.

- „ $\Longrightarrow$ ": Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.
  Zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} f(x_0) = y_0$. Sei also $\varepsilon > 0$, nach Def. von $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert ein $\delta > 0$, s.d.
  $$|f(x) - y_0| < \varepsilon \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$
  Zu $\delta > 0$ ex. ein Index $n_\delta \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta \quad \forall n \geq n_\delta$.
  $\Longrightarrow$ $|f(x_n) - y_0| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\delta$
  $\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$
- „ $\Longleftarrow$ " Zu zeigen.: $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$, d.h.
  $$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \colon |f(x) - y_0| < \varepsilon \quad \forall x \in D \colon |x - x_0| < \delta.$$
  Angenommen das gilt nicht.
  Dann $\exists \varepsilon_0 > 0$, s.d. $\forall \delta > 0$ ein $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - y_0| \geq \varepsilon_0$.
  $\Longrightarrow$ Für alle $n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in D$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(x) - y_0| \geq \varepsilon_0$
  $\Longrightarrow$ Diese $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, aber $|f(x_n) - y_0| \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
  $\Longrightarrow$ $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen y_0. Widerspruch!
  $\Longrightarrow$ Annahme ist falsch $\Longrightarrow$ Behauptung

□

4.2 Stetigkeit

Definition 4.10 (Stetigkeit)**.** Sei $f : D \to \mathbb{R}$, und $a \in D$. f heißt stetig im Punkt a, falls

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

f heißt stetig in D, falls f stetig in a ist $\forall a \in D$.

Äquivalente Definitionen

Definition 4.11 (Stetigkeit per ε / δ Argument)**.** f ist stetig in a $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ mit } |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta.$$

Definition 4.12 (Stetigkeit mit Folgen)**.** f ist stetig in a $\iff$

$$\forall \text{ Folgen } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } D \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ gilt, dass } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Definition 4.13 (Stetigkeit mit Bild)**.** f ist stetig in a $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.d.

$$f(U_\delta(a)) \subset \,]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[\, = U_\varepsilon(f(a)).$$

Beispiel 4.14. (1) Konstante Funktionen und die Identität sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Konstante Fkt.: Wähle δ beliebig, da

$$\forall x \in \mathbb{R} \colon |x-a| < \delta \implies 0 = |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Bei der Identität: Wähle $\delta := \varepsilon > 0$, denn

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x-a| < \delta = \varepsilon \implies |f(x) - f(a)| = |x-a| < \varepsilon.$$

(2) $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$. Das folgt aus Rechenregeln für Folgen,

$$f(x_n) \to f(a), n \to \infty \implies |f(x_n)| \to |f(a)|.$$

(3) $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

Sei $a \in \mathbb{R}$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} (x_n - a) = 0.$$

Aus $\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1$ folgt $\lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a) = 1$

$$\implies \lim_{x\to a} \exp(x_n) = \lim_{x_n\to a} (\exp(a) + \exp(n-a))) = \exp(a)\cdot 1 = \exp(a).$$

Folgerung: Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$ und $f(a) \neq 0$. Dann $\exists \delta > 0$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in D \cap]a-\delta, a+\delta[$, d.h. es ex. Umgebungen von a, s.d. $f(x) \neq 0$ für alle Punkte in dieser Umgebung.

Beweis. Wähle $\varepsilon := \frac{|f(a)|}{4} > 0$. Dann $\exists \delta > 0$ mit $|f(x) - f(a)| < \varepsilon\ \forall x \in D$ mit $|x-a| < \delta$.

$$\implies |f(x)| \geq |f(a)| - |\underbrace{f(x) - f(a)}_{<\varepsilon}| > |f(a)| - \frac{|f(a)|}{4} = \frac{3}{4}|f(a)| > 0.$$

$\forall x \in D$ mit $|x-a| < \delta$ □

Satz 4.15. 1. Es sei $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$. Dann sind $\lambda f + \mu g\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$ und falls $g(x) \neq 0\ \forall x \in D$ $\frac{f}{g}$ stetig in a.

2. Sei f stetig in $a \in D$ mit $f(D) \subset \overline{D} \subset \mathbb{R}$ und $h\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ stetig in $f(a)$. Dann ist die Komposition $(h\circ f)\colon D \to R, (h \circ f)(x) := h(f(x))$ stetig in a.

Beweis. 1. folgt aus Rechenregeln für konvergente Folgen. z.B.: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Dann

$$(f+g)(a) = \lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(a) + g(a).$$

2. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Dann:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{y_n:=f(x_n)} = b =: f(a).$$

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\overline{D}$. Aus Stetigkeit von h in b folgt:

$$\lim_{n\to\infty} h(y_n) = h(b) \implies \lim_{n\to\infty} \underbrace{h(f(x_n))}_{(h\circ f)(x_n)} = h(f(a)).$$

□

Beispiel 4.16. 1. Alle Polynome

$$f(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

sind stetig in $\mathbb{R}$.

2. Rationale Funktionen $\frac{f}{g}$ mit Polynomen f, g $(g \neq 0)$ sind stetig in $D := \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$.

3. f stetig in D, dann ist auch $|f|\colon D \to \mathbb{R}$ stetig, als Komposition: $(|\cdot| \circ f)(x)$.

4. Heaviside Funktion ist stetig $\forall x \in R \setminus \{0\}$.

5. Dirichlet-Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

ist in keinem Punkt stetig.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{Q}$. Es existiert eine Folge

$$x_n := a + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

aber

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{=0} = 0 \neq 1 = f(a).$$

Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Es ex. eine Folge von rationalen Zahlen x_n mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. $x_n \in \mathbb{Q}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (Konstruktion von reellen Zahlen) es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{=1} = 1 \neq 0 = f(a).$$

□

4.3 Weitere Eigenschaften stetiger Funktionen

Definition 4.17 (offene, abgeschlossene, kompakte Mengen)**.** Eine Menge $D \subset \mathbb{R}$ heißt offen, falls $\forall x \in D\ \exists r > 0$ mit

$$B_r(x) :=]x - r, x + r[\subset D.$$

d.h. jeder Punkt besitzt eine Umgebung, welche ganz in D liegt.

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen, falls die Grenzwerte von konvergenten Folgen aus D wieder in D liegt, d.h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies x_0 \in D$.

$D \subset \mathbb{R}$ heißt kompakt, falls D beschränkt und abgeschlossen ist. (beschränkt $\overset{\text{def.}}{=} \exists C > 0$ mit $|x| < C\ \forall x \in D$)

Beispiel 4.18.
1. $]0, 1[$ ist offen. $\forall x \in]0, 1[$ setze $r := \frac{1}{2}\min\{x, 1 - x\}$. Man kann zeigen, dass $B_r(x) \subset]0, 1[$

   $]0, 1[$ ist nicht abgeschlossen, weil $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset]0, 1[$. mit $\frac{1}{n} \to 0 \notin]0, 1[$.

2. $[0, 1]$ ist kompakt. $x \in [0, 1] \implies |x| \leq 1 \implies [0, 1]$ beschränkt.

   Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0, 1]$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dann gilt

   $$0 \leq x_n \leq 1\ \forall n \overset{\text{Sandwich}}{\implies} 0 \leq x_0 \leq 1 \implies x_0 \in [0, 1] \quad \text{abgeschlossen.}$$

   $[0, 1]$ ist nicht offen, da $0 \in [0, 1]$, aber $\underbrace{] - r, r[}_{B_r(0) \not\subset [0,1]} \quad \forall r > 0$

3. $\mathbb{R}$ ist offen, abgeschlossen aber nicht kompakt.

Lemma 4.19 (Folgenkompakt)**.** $D \subset \mathbb{R}$ ist kompakt genau dann wenn, alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D eine konvergente Teilfolge enthalten mit Grenzwert in D.

Beweis.
- „ $\implies$ " Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D, Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\implies$ nach Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset D \overset{D \text{ abgeschlossen}}{\implies} \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in D$

- „ $\impliedby$ " Angenommen. D ist unbeschränkt, d.h. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in D$ mit $|x_n| \geq n$.

  Dann enthält $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge, weil alle Teilfolgen unbeschränkt sind. Widerspruch $\implies D$ ist beschränkt.

  Bleibt zu zeigen: D ist abgeschlossen. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $x_n \to x_0, n \to \infty$. Nach Voraussetzungen existiert eine konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Limes in D. Da alle Teilfolgen ebenfalls gegen x_0 konvergieren folgt, dass $x_0 \in D$.

□

Satz 4.20 (Das stetige Bild kompakter Mengen ist kompakt)**.** Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig mit $D \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$ kompakt.

Beweis. Zu zeigen: $f(D)$ ist kompakt. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f(D)$. Dann ex. eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $f(x_n) = y_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ (f stetig).

D kompakt $\implies \exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in D$.

$$f \text{ stetig} \implies f(x_{n_k}) = \underbrace{y_{n_k}}_{\text{Teilfolge in } f(D)} \to f(x_0) \in f(D).$$

□

Definition 4.21 (Supremum, Infimum, Maximum, Minimum reellwertiger Funktionen)**.** Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$.

$$\sup_{x\in D} f(x) \quad \text{kleinste obere Grenze der Bildmenge } B_f := \{f(x) \mid x \in D\}$$

$$:= \sup B_f := \min\{\beta \in \mathbb{R} \mid y \le \beta \ \forall y \in B_f\}.$$

$$\inf_{x\in D} f(x) \ := \inf B_f := \min\{\beta \in \mathbb{R} \mid y \le \beta \ \forall y \in B_f\}.$$

Falls $B_f := f(D)$ beschränkt ist, dann $\exists$ inf und sup.

$x_{\min} \in D$ heißt Minimum, $x_{\max}$ Maximum von f, falls

$$\begin{cases} \inf f(x) = f(x_{min}) =: \min\ f(x) \\ \sup\ f(x) = f(x_{max}) =: \max\ f(x) \end{cases}.$$

Satz 4.22. Stetige reellwertige Funktionen nehmen auf kompakten Mengen ihr Minimum und Maximum an, d.h. $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig, D kompakt, dann ex. $x_{min}, x_{max} \in D$ mit
$f(x_{min}) = \inf\ \{f(x) \mid x \in D\}$
$f(x_{max}) = \sup\ \{f(x) \mid x \in D\}$

Beweis. Folgt aus Satz. Zunächst $f(D)$ ist beschränkt, d.h. dass Supremum und Infimum von $f(D)$ existieren. Nach Definition von $s := \sup\ \{f(x) \mid x \in D\}$ ex. eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $f(x_n) \to s, n \to \infty$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \to x_{max}$, $k \to \infty$, $x_{max} \in D$.
$\implies f(x_{n_k}) \to f(x_{max}), k \to \infty$
$\implies$ Behauptung für Supremum □

Satz 4.23 (Zwischenwertsatz)**.** Sei $f\colon \underbrace{[a,b]}_{\text{kompakt}} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \neq f(b)$. Dann gibt es zu jedem y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ $(*)$ mindestens ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = y$.

$*$ d.h. $f(a) \le y \le f(b)$ falls $f(a) \le f(b)$, sonst $f(b) \le y \le f(a)$)

Beweis. Sei $f(a) < y < f(b)$ (die Fälle $y = f(a)$ oder $y = f(b)$ sind trivial). Betrachte $g(x) := f(x) - y$. $g(x)$ stetig und $g(a) < 0, g(b) > 0$.

Wir suchen die Nullstelle $c \in [a,b]$ mit $g(c) = 0$ mit dem Intervallschachtelungsprinzip in $\mathbb{R}$.

Starte mit $I_0 = [a_0, b_0] := [a,b]$, es gilt $g(a_0)\cdot g(b_0) < 0$. Sei $c_0 := \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ der Mittelpunkt von $[a_0, b_0]$. Falls $g(c_0) = 0$, dann ist c_0 Nullstelle von $g(x)$. Sonst setze

$$I_1 = [a_1, b_1] = \begin{cases} [a_0, c_0] & \text{für } g(a_0)g(c_0) < 0 \\ [c_0, b_0] & \text{für } g(c_0)g(b_0) < 0 \end{cases}.$$

Es gilt $g(a_1) \cdot g(b_1) < 0$ und $|a_1 - b_1| = \frac{1}{2}|a_0 - b_0|$ usw.

Nach endlich vielen Schritten erhalten wir entweder eine Nullstelle c_n von $g(x)$. Dann ist $c = c_n$, oder eine unendliche Folge von geschachtelten Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften $g(a_n)g(b_n) < 0$ und

$$|b_n - a_n| = \frac{1}{2}|b_{n-1} - a_{n-1}| = \ldots = \left(\frac{1}{2}\right)^n |b_0 - a_0|.$$

wird konstruiert. $\implies$

$$\exists c = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \text{ und } c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Nach Konstruktion $g(a_n)g(b_n) < 0$. Wegen der Stetigkeit und den Eigenschaften des Limes gilt $g(a_n)g(b_n) \to g(c)g(c) \leq 0, n \to \infty$
$\implies g(c) = 0$ $\square$

Bemerkung 4.24.

1. Bisektionsverfahren zur Berechnung einer Nullstelle einer stetigen Funktion funktioniert wie im Beweis des Zwischenwertsatzes.

2. Eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit Bildbereich $B \subset [a,b]$ besitzt einen „Fixpunkt", d.h. $\exists c \in [a,b]$ mit $f(c) = c$ (Folgt aus Beweis des Zwischenwertsatzes mit $g(x) = f(x) - x$

3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist $f(I)$ ebenfalls ein Intervall. Konvention: $f \equiv a$ konstant, dann $f(I) = [a,a]$.

   Beweis. Setze $B := \sup\{f(x) \mid x \in I\}$ falls f nach oben beschränkt, sonst $B := \infty$ und $A := \inf\{f(x) \mid x \in I\}$ falls f nach unten beschränkt, sonst $A := -\infty$. Sei $y \in \mathbb{R}$ mit $A < y < B$. Nach Definition $\exists x_0, x_1 \in I$ mit $f(x_0) < y < f(x_1)$.
   $\overset{\text{ZWS}}{\implies} \exists x \in I$ mit $f(x) = y$
   $\implies\ ]A,B[\ \subset f(I)$. Damit:

   $$f(I) \in \{]A,B[, [A,B[,]A,B], [A,B]\}.$$

   $\square$

Definition 4.25 (Monotone Funktionen)**.** Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$.

$$f \text{ heißt } \begin{cases} \text{monoton wachsend} & f(x) \leq f(x') \\ \text{streng monoton wachsend} & f(x) < f(x') \\ \text{monoton fallend} & f(x) \geq f(x') \\ \text{streng monoton fallend} & f(x) > f(x') \end{cases} \quad \forall x, x' \in D \text{ mit } x < x'.$$

Satz 4.26 (Stetigkeit der Umkehrfunktion)**.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige streng monoton wachsende (streng monoton fallende) Funktion.

Dann ist $f\colon I \to f(I)$ bijektiv und $f^{-1}\colon f(I) \to I$ ebenfalls stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Beweis. $f(I)$ ist wieder ein Intervall, f ist streng monoton $\implies$ injektiv $\implies$ $f : I \to f(I)$ bijektiv, d.h. $\exists f^{-1}$.

Außerdem $f(x_1) < f(x_2) \implies$

$$\begin{cases} f^{-1}(f(x_1)) = x_1 < x_2 = f^{-1}(f^{(x_2)}) & f \text{ wachsend} \\ f^{-1}(f(x_1)) = x_1 > x_2 = f^{-1}(f^{(x_2)}) & f \text{ fallend} \end{cases}.$$

$\implies f^{-1}$ auch streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Zu zeigen: $f^{-1}\colon f(I) \to I$ ist stetig. O.B.d.A. f wachsend (sonst $\to -f$). Sei $y_0 \in f(I)$ mit $x_0 := f^{-1}(y_0)$ und $\varepsilon > 0$.

1. Fall: x_0 ist kein Randpunkt, sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset I$. Dann

$$y_- := f(x_0 - \varepsilon) < y_0 < f(x_0 + \varepsilon) =: y_+.$$

Definiere $\delta := \min(y_+ - y_0, y_0 - y_-)$. $\implies$

.

$$B_\delta(y_0) \subset]y_-, y_+[\overset{\text{ZWS}}{\subset} f\ ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\quad | f^{-1} \implies \quad f^{-1}(]y_0 - \delta, y_0 + \delta[) \subset f^{-1}(f(]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[)) =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$$

$\implies f^{-1}$ stetig in y_0 nach Definition.

2. Fall: x_0 ist Randpunkt $\implies y_0$ ist Randpunkt. Gleiche Argumentation wie oben mit $[x_0 - \varepsilon, x_0]$ bzw. $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ □

Beispiel 4.27.

1. Wurzeln sind stetig

   Für $k \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$, $f(x) := x^k$ streng monoton wachsend und surjektiv.
   $\implies$ Die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [0, \infty[\to [0, \infty[$ ist stetig und streng monoton wachsend mit $f^{-1}(x) = \sqrt[k]{x}$

2. ln ist stetig

> **Satz 4.28** (Logarithmus)**.** $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ ist streng monoton wachsend mit $\exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[$. Die Umkehrfunktion $\ln\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ ist stetig, streng monoton wachsend und heißt natürlicher Logarithmus. $\ln(x) = \log_e(x)$.
>
> Es gibt die Funktionalgleichung
>
> $$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \quad \forall x, y \in]0, \infty[.$$

Beweis. $f(x) = \exp(x) = e^x \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

1. e^x ist streng monoton wachsend, weil für $k > 0$ gilt $e^k > 1$ und für $x < x'$ folgt $\exists h > 0$ s.d. $x' = x + h$.
   $\implies e^x < e^x \cdot \underbrace{e^h}_{>1} = e^{x'} \implies e^x$ injektiv

2. e^x surjektiv, weil: Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Folge $(e^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert strikt, da $e > 1 \implies$ Folge $(e^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.
   $\implies \exists n \in \mathbb{N}$ mit $e^{-n} < a < e^n$.

   Die Exponentialfunktion ist auf $\mathbb{R}$ und auch auf $[-n, n]$ stetig $\overset{\text{ZWS}}{\implies} \exists c \in [-n, n]$, s.d. $e^c = a \implies e^x$ surjektiv

3. Nach Umkehrfunktionssatz folgt $\ln(x)$ ist stetig und strikt monoton wachsend $\forall[e^{-n}, e^n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$\implies \ln\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.

4. Z.z.: $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$.
Für x, y gilt

$$\begin{aligned} & \exp(\ln x + \ln y) = e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} = x \cdot y \qquad | \ln \\ \implies & \ln(e^{\ln x + \ln y}) = \ln x + \ln y = \ln(x \cdot y). \end{aligned}$$

□

Definition 4.29 (a^x)**.** Für $a > 0$ wird die Funktion $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto a^x$ definiert durch

$$\exp_a(x) := a^x := \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}.$$

Lemma 4.30 (Eigenschaften von a^x)**.** Sei $a > 0$:

1. $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig
2. $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
3. $\exp_a(n) = a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{mal}} \quad n \in \mathbb{N}$
4. $\exp_a(n) = a^n \quad n \in \mathbb{Z}$
5. $\exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p} \quad \forall p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$
6. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
7. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
8. $a^x b^x = (ab)^x \quad b > 0, x \in \mathbb{R}$
9. $\frac{1}{a^x} = a^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Beweis. trivial. □

4.4 Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 4.31 (gleichmäßige Stetigkeit)**.** Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig auf D, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit } |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in D \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Bemerkung 4.32.

1. Jede gleichmäßige stetige Funktion auf D ist auch stetig
2. Unterschied zwischen stetig und gleichmäßig stetig:
   - stetig: δ hängt von ε und x ab

- gleichmäßig stetig: δ hängt nur von ε ab

Beispiel 4.33. $f\colon]0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$

f stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Beweis. Wähle $\varepsilon = 1$. Angenommen: $\exists \delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < 1 \ \forall x, y \in]0,1]$ mit $|x - y| < \delta$.

$\exists n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \delta$. Für $x := \frac{1}{n}$ und $y := \frac{1}{2n}$ gilt $|x - y| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}| = |\frac{1}{2n}| < \delta$, aber $|f(x) - f(y)| = |n - 2n| = n \geq 1$. Widerspruch □

Satz 4.34. Auf kompakten Mengen (Intervallen) gilt: stetig $\iff$ gleichmäßig stetig

Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $D \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis. Ang. f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann $\exists \varepsilon_0 > 0$ mit $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n, y_n \in D$, s.d. $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$.

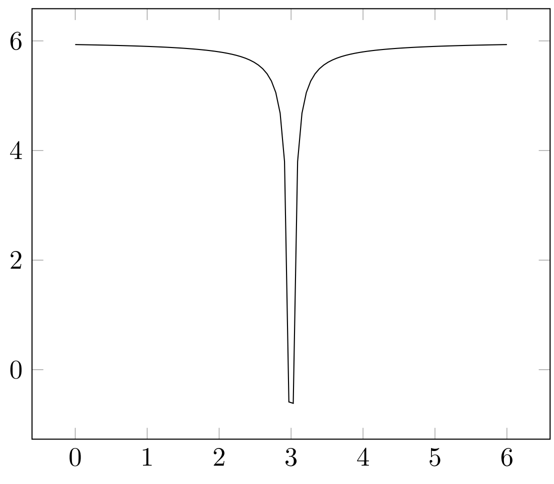
Folgenkompakt $\implies \exists$ konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $x_{n_k} \to p \in D$.

$k \to \infty$. Dann konvergiert auch $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen p, d.h. $y_{n_k} \to p, k \to \infty$ (weil $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$
$\implies \varepsilon_0 \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to |f(p) - f(p)| = 0$. Widerspruch □

Definition 4.35 (Lipschitzstetigkeit)**.** Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt lipschitz stetig auf D, falls $\exists$ Konstante $L > 0$ (sog. Lipschitzkonstante), s.d.

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in D.$$

Beispiel 4.36. für $x = 3$ nicht lipschitzstetig.



Bemerkung 4.37. Lipschitzstetige Funktionen sind gleichmäßig stetig (stärker als gleichmäßige Stetigkeit)

4.5 Trigonometrische Funktionen

Satz 4.38. Für $x \in \mathbb{R}$ definiere $\cos(x) := \operatorname{Re}(e^{ix})$ und $\sin(x) := \operatorname{Im}(e^{ix})$. Dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}$.

1. $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ (Eulersche Formel)
2. $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$
   $\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$
3. $\cos(-x) = \cos(x)$
   $\sin(-x) = -\sin(x)$
4. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Beweis. trivial. □

Satz 4.39. cos und sin sind stetig.

Beweis. Restgliedabschätzung von $\exp(x)$ gilt auch für komplexe $z \in \mathbb{C}$

$$|R_{n+1}(z)| \leq 2\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Damit folgt für eine Nullfolge in $\mathbb{C}$ ($z_n \to 0, n \to \infty, z_n \in \mathbb{C}$)
$\implies \exp(z_n) \to \exp(0) = 1, n \to \infty$

Mit Funktionalgleichung $\exp(x \cdot y) = \exp(x) + \exp(y)$ gilt für eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}, z_n \to a, n \to \infty$ in $\mathbb{C}$ $\implies$ $\exp(z_n) \to \exp(a)$. ($z_n - a \to 0, \exp(z_n - a) \to 1 \implies \lim_{n\to\infty} \exp(z_n) = \lim_{n\to\infty} (\exp(a) \cdot \exp(z_n - a)) = \exp(a)$)

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x_n \to a, x_n \in \mathbb{R}$. Dann $\exp(ix_n) \to \exp(ia)$ mit Re / Im ($\operatorname{Re}(z_n) \to \operatorname{Re}(a)$, $\operatorname{Im}(z_n) \to \operatorname{Im}(a)$, $z_n \to a$ in $\mathbb{C}$.

$\implies \cos(x_n) \to \cos(a)$ und $\sin(x_n) \to \sin(a)$
$\implies$ Stetigkeit □

Satz 4.40 (Additionstheoreme)**.** $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
   $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
2. $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
   $\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Beweis. 1. Mit $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ folgt direkt

$$\begin{aligned}
\cos(x + y) + i\sin(x + y) &= e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy} \\
&= (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) \\
&= \underbrace{\cos x\cos y - \sin x\sin y}_{\text{Re}} + i\underbrace{(\sin x\cos y + \cos x\sin y)}_{\text{Im}}
\end{aligned}$$

2. Setze $u := \frac{x+y}{2}, v := \frac{x-y}{2}$. $x = u + v, y = u - v$.

$$\begin{aligned}\sin x - \sin y &= \sin(u+v) - \sin(u-v)\\ &= \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v - (\sin u \underbrace{\cos(-v)}_{=\cos v} + \cos u \cdot \underbrace{\sin(-v)}_{-\sin v})\\ &= 2\cos u \sin v = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}.\end{aligned}$$

□

Satz 4.41 (Reihenentwicklung Sinus / Cosinus)**.** Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt (absolut konvergente Potenzreihendarstellung)

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots.$$

und

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots.$$

Beweis. Die absolute Konvergenz folgt als Teilreihe der Exponentialreihe (als Majorante)

Es gilt für $m \in \mathbb{N}_0$

$$i^n = \begin{cases} 1 & n = 4m\\ i & n = 4m+1\\ -1 & n = 4m+2\\ -i & n = 4m+3\end{cases}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n!}\\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{\cos(x)} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin(x)}.\end{aligned}$$

□

Satz 4.42 (Restgliedabschätzung Sinus / Cosinus)**.** Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+2}(x).$$

und

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+3}(x).$$

mit

$$|R_{2n+2}(x)| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \text{ für } |x| \le 2n+3.$$

bzw.

$$|R_{2n+3}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \text{ für } |x| \leq 2n+4.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
R_{2n+2}(x) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
&= (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-(n+1)} \frac{x^{2(k-(n+1))}}{(2k)! \frac{1}{(2n+2)!}} \right) \\
&= (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}(2n+2)!}{(2k+2n+2)!} \right).
\end{aligned}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$\begin{aligned}
a_k &:= \frac{x^{2k}(2n+2)!}{(2k+2n+2)!} = \frac{x^{2k}}{(2n+3)(2n+4)\dots(2k+2n+2)} \\
a_{k-1} &= \frac{x^{2k-2}(2n+2)!}{(2k+2n)!}
\end{aligned}$$

damit

$$a_k = a_{k-1} \cdot \frac{x^2}{(2k+2n+1)(2k+2n+2)}.$$

Es gilt für $|x| \leq 2n+3, k \geq 1$

$$\frac{x^2}{(2k+2n+1)(2k+2n+2)} \leq \frac{(2n+3)^2}{(2n+3)(2n+4)} < 1.$$

$\Longrightarrow$

$$a_k \leq \frac{(2n+3)^k}{(2n+4)^k} a_0 \quad a_0 = \frac{1}{(2n+2)!}.$$

$\overset{\text{Leibniz}}{\Longrightarrow}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

konvergent mit

$$0 < \underbrace{\underbrace{1 - a_1}_{>0} + \underbrace{a_2 - a_3}_{>0} + \underbrace{a_4 - \dots}_{>0}}_{<1} < 1.$$

$\Longrightarrow$

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \text{ für } |x| \leq 2n+3.$$

Genauso für $R_{2n+3}(x)$ (Sinus). $\square$

Lemma 4.43. Sinus und Cosinus Funktionen haben das folgende Verhalten

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin(x)}{x}-1\right| &= \left|\underbrace{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}}_{\frac{\sin(x)}{x}}-\ldots-1\right|\\ &= \left|x\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k-1}}{(2k+1)!}\right|\\ &\overset{|x|<1}{\le} |x|\cdot\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\right| \le |x|\cdot e.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\underbrace{\left|\frac{\sin(x)}{x}-1\right|}_{\to 0}\le\underbrace{|x|\cdot e}_{\to 0}.$$

genauso für $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}$. □

4.6 Die Zahl π

Ziel: Analytische Definition von $\pi\in\mathbb{R}$.

Satz 4.44 (und Definition)**.** Die Funktion $\cos\colon[0,2]\to\mathbb{R}$ hat genau eine Nullstelle im Intervall $[0,2]$, welche mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet wird ($\pi := 2\frac{\pi}{2}$).

Beweis. in 4 Schritten.

Schritt 1 / Lemma 1: $\cos(2)\le-\frac{1}{3}$.
Restgliedabschätzung liefert ($|x|\le 5$).

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+R_4(x)\text{ mit }|R_4(x)|\le\frac{|x|^4}{24}.$$

$\Longrightarrow$

$$\cos(2)=1-2+\underbrace{R_4(2)}_{\le\frac{16}{24}=\frac{2}{3}}\le-1+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}.$$

Schritt 2 / Lemma 2: $\sin(x)>0\ \forall x\in\,]0,2[$
Es gilt

$$\sin(x)=x+R_3(x)=x\left(1+\frac{R_3(x)}{x}\right)\left|\frac{R_3(x)}{x}\right|\le\frac{|x|^2}{6}\overset{0<x\le 2}{\le}\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$\Longrightarrow$

$$1+\frac{R_3(x)}{x}\ge\frac{1}{3}.$$

Schritt 3 / Lemma 3: $\cos : [0,2] \to \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend.
Sei $0 \leq y < x \leq 2$. Dann gilt

$$\cos(x) - \cos(y) \overset{\text{Additionstheorem}}{=} -2 \underbrace{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}_{>0} \underbrace{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}_{>0} < 0.$$

Schritt 4 (Beweis der Definition von π) $\cos(0) = 1$ (nach Definition).

$$\cos(2) \leq -\frac{1}{3} \overset{\text{Zwischenwertsatz}}{\Longrightarrow} \exists x_0 \in [0,2] \text{ mit } \cos(x_0) = 0.$$

Nach Lemma 3 ist x_0 eindeutig. □

Korrolar 4.45 (Spezielle Werte von exp)**.** Es gilt: $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$, $e^{2\pi i} = 1$

Beweis. Übung. □

Korrolar 4.46 (Eigenschaften Sinus / Cosinus)**.** $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
2π: Periodizität

(ii) $\cos(x + \pi) = -\cos(x) \quad \sin(x + \pi) = -\sin(x)$

(iii) $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \quad \sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

(iv) Nullstellen von $\sin / \cos$.
$\{x \in \mathbb{R} | \sin x = 0\} = \{x = k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
$\{x \in \mathbb{R} | \cos x = 0\} = \{x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis. folgt aus den Additionstheoremen, der Definition von $\frac{\pi}{2}$, den speziellen Werten von exp und folgender Tabelle

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$\sin x$	0	1	0	-1	0

. □

Korrolar 4.47 ($e^z = 1$)**.** Es gilt $\{z \in \mathbb{C} | e^z = 1\} = \{i2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis. ohne Beweis. □

Definition 4.48 (Tangens, Cotangens)**.** (i) Die Tangensfunktion

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$$

ist definiert durch

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}.$$

(ii) Die Cotangensfunktion

$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{x = k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

ist definiert durch

$$\cot x := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

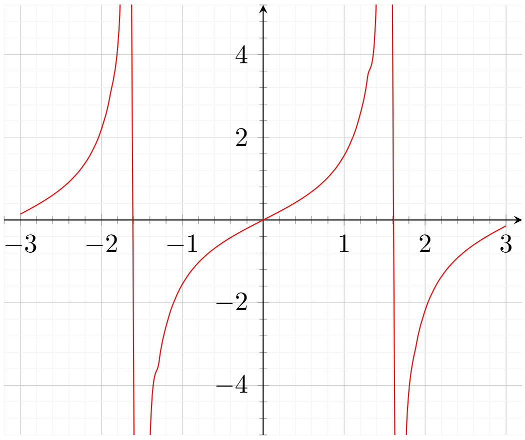


Abbildung 4.1: $\tan(x)$

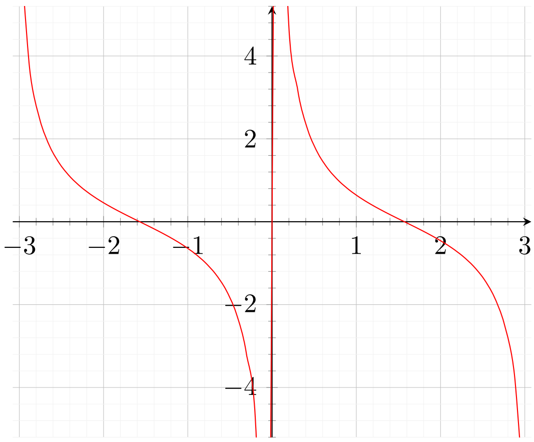


Abbildung 4.2: $\cot(x)$

Definition 4.49 (Arcusfunktionen)**.** (i) $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ ist streng monoton fallend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt Arcus-Cosinus.

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

(ii) $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ ist streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt Arcus-Sinus.

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

(iii) $\tan\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt Arcus-Tangens.

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Satz 4.50 (Polarkoordinaten)**.** Jedes $z \in \mathbb{C}$ lässt sich schreiben als $z = r \cdot e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ und $r = |z| \in [0, \infty[$.

Für $z \neq 0$ ist φ bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt.

Beweis. Rannacher. □

Kapitel 5

Differentiation

5.1 Ableitung

Definition 5.1. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, eine Funktion. Definiere Differenzenquotienten in $x_0 \in D$.

$$D_h f(x_0) := \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

für Inkrement $h \in \mathbb{R}$ mit $x_0 + h \in D$.

Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar im Punkt $x_0 \in D$ mit Ableitung $f'(x_0)$, wenn für jede Nullfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_0 + h_n \in D$ die Folge $(D_{h_n} f(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Bemerkung 5.2.

1. Ist eine Funktion differenzierbar in $x_0 \in D$, so haben die Folgen von Differenzenquotienten alle denselben Limes.

$$f'(x_0) := \lim_{x_0+h\in D\ h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

2. In anderen Worten: Differenzierbarkeit in $x_0 \in D \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

3. Notationen:

$$f'(x_0),\ \frac{df(x_0)}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x_0),\ \frac{df}{dx}(x_0).$$

4. Ist $x_0 \in D$ ein Randpunkt, z.B.: unterer oder oberer Endpunkt von $D = [a, b]$, dann wird in der Definition der rechts- oder linksseitige Grenzwert gebildet. Man spricht von der links- oder rechtsseitigen Ableitung.

$$\lim_{x\nearrow x_0 \text{ oder } x\uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$(:\Longleftrightarrow\ x < x_0, x \to x_0)$. Analog für die rechtsseitige Ableitung.

5. f heißt differenzierbar auf D, wenn sie $\forall x_0 \in D$ differenzierbar (bzw. einseitig differenzierbar im Falle eines Randpunktes) ist. f heißt stetig differenzierbar, falls die Ableitung $f'\colon D \to \mathbb{R}$ auf D stetig ist.

6. Differenzierbarkeit bedeutet: Man kann die Funktion f in x_0 „gut” durch eine affin-lineare Funktion annähern (affin-linear: Polynom vom Grad 1).

Satz 5.3 ($\varepsilon - \delta$ Sprache)**.** Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in D$ differenzierbar mit $f'(x_0)$ $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$, s.d. $\forall x_0 + h \in D$, $|h| < \delta_\varepsilon$:

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Beweis. trivial. □

Satz 5.4 (differenzierbar $\iff$ linear approximierbar)**.** $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $x_0 \in D$, genau dann wenn eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + R(x).$$

Für das Restglied $R(x) = R(x, x_0)$ gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$

In diesem Falle ist c eindeutig bestimmt mit $c = f'(x_0)$.

Beweis. „ $\implies$ ”: Sei f differenzierbar mit $c = f'(x_0)$. Definiere Funktion

$$R(x) := f(x) - f(x_0) - c(x - x_0).$$

Dann gilt

$$\frac{R(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \underbrace{c}_{f'(x_0)} \xrightarrow[x \to x_0]{f \text{ diff.}} 0.$$

„ $\impliedby$ ” Sei umgekehrt $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{R(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - c \xrightarrow{x \to x_0} 0.$$

, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c.$$

$\implies$ $f'(x_0) = c$. Limes eindeutig $\implies$ f differenzierbar. □

Bemerkung 5.5. Aus dem Satz zur linearen Approximation folgt eine geometrische Interpretation: $f(x)$ kann in x_0 „gut” durch eine Gerade approximiert werden.

$$f(x) \approx g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

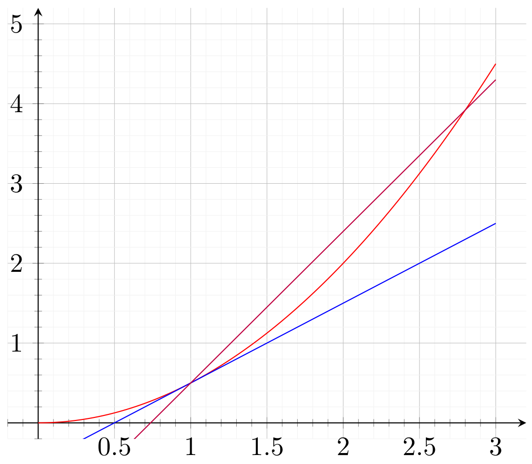
Der Graph von g ist eine Tangente. Sekante:

$$s_h(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0).$$

Tangente:

$$g(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0).$$

Abbildung 5.1: $f(x)$ in rot, ihre Tangente (blau) und eine Sekante (lila) im Punkt $x_0 = 1$



Lemma 5.6. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$. Dann ist f stetig in x_0.

Beweis. Sei f differenzierbar, d.h.

$$\exists f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dann gilt wegen der linearen Approximation:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{R(x)}{x - x_0}(x - x_0). \end{aligned}$$

Für $x \to x_0$ geht

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} + \underbrace{\frac{R(x)}{x - x_0}}_{\to 0}\underbrace{(x - x_0)}_{\to 0}.$$

d.h. $f(x) \to f(x_0) \overset{\text{Def. Stetigkeit}}{\Longrightarrow} f$ stetig. $\square$

Bemerkung 5.7. Umgekehrt gilt das nicht, z.B.: die Betragsfunktion.

Beispiel 5.8.

1. Konstante Funktionen $f \equiv c$ sind stetig differenzierbar mit $f'(x_0) = 0\ \forall x_0$.
2. Lineare Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f = ax$ sind stetig differenzierbar mit $f'(x_0) = a\ \forall x_0$, weil

$$\lim_{h \to 0} \frac{a(x_0 + h) - ax_0}{h} = a.$$

3. Monomfunktion: $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ ist stetig differenzierbar mit $f'(x) = nx^{n-1}\ \forall x$, weil

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x + h - x)(x + h)^{n-1} + (x + h)^{n-2} \cdot x + \ldots + (x + h)x^{n-2} + x^{n-1}}{h} \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x + \ldots + x^{n-1}}_{n\text{-mal}} \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

4. Elementare rationale Funktionen $f = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

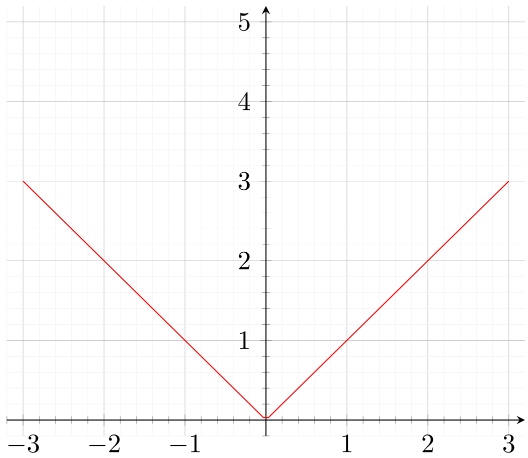
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{x-(x+h)}{(x+h)\cdot x} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{\underbrace{(x+h)}_{\to x}\cdot x} = -\frac{1}{x^2}.$$

5. Betragsfunktion $f(x) = |x|$

$$f'(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}.$$

ist bei $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. $\frac{d|x|}{dx}$ für $x_0 = 0$ existiert nicht. Allerdings existieren die einseitigen Ableitungen.

Abbildung 5.2: Betragsfunktion



6. Exponential-Funktion $f(x) = e^x$ ist stetig differenzierbar $\forall x$ mit $f'(x) = e^x$, weil

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h}}_{=1} = e^x.$$

mit

$$e^h = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \dots$$
$$\frac{e^h - 1}{h} = 1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3!} + \dots \xrightarrow{h\to 0} 1.$$

7. Sinus / Cosinus. mit $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cdot\sin\frac{1}{2}(x-y)$ folgt

$$\begin{aligned}
\sin'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(\frac{1}{2}h + x\right)\cdot\sin(\frac{1}{2}h)}{h} \\
&= \underbrace{\lim_{h\to 0}\cos\left(\frac{1}{2}h + x\right)}_{\to\cos x} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin(\frac{1}{2}h)}{\frac{h}{2}}}_{\to 1} \\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

$\cos'(x) = -\sin(x)$ folgt analog.

Satz 5.9 (Ableitungsregeln)**.** Für die Ableitungen gelten folgende Rechenregeln. Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

1. Lineare Kombinationen $\alpha f + \beta g$ ist differenzierbar mit
$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. Produktregel
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$
3. Quotientenregel
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2}.$$
$g(x) \neq 0$

Beweis. 1. Z.z.: $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$

$$\begin{aligned}\frac{(\alpha f + \beta g)(x_1) - (\alpha f + \beta g)(x_0)}{x_1 - x_0} &= \alpha\left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right) + \beta\left(\frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0}\right)\\ &\xrightarrow{x_1 \to x_0} \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).\end{aligned}$$

2. Z.z.: $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\begin{aligned}\frac{f(x_1)g(x_1) - f(x_0)g(x_0)}{x_1 - x_0} &= \frac{f(x_1)g(x_1) - f(x_0)g(x_1) + f(x_0)g(x_1) - f(x_0)g(x_0)}{x_1 - x_0}\\ &= g(x_1)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + f(x_0)\frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0}\\ &\xrightarrow[g \text{ stetig in } x_0]{x_1 \to x_0} g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

3. Z.z.: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Für $f \equiv 1$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0}\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right)\\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}\\ &\overset{g \text{ stetig}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}\\ &= \frac{1}{g(x_0)^2} \cdot (-g'(x_0))\end{aligned}$$

Nun für f beliebig mit Produktregel:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= (f \cdot \frac{1}{g})'(x_0)\\ &= f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\cdot\left(\frac{1}{g(x_0)}\right)'\\ &= f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)} - f(x_0)\cdot\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.\end{aligned}$$

□

Satz 5.10 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion)**.** Sei $f\colon D \to B \subset \mathbb{R}$ stetige invertierbare Funktion mit Inverser

$$f^{-1}\colon B \to D..$$

Ist f in $x_0 \in D$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$. Dann ist f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar mit

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad y_0 = f(x_0).$$

Beweis. Sei $y_n = f(x_n)$, $y_0 = f(x_0)$, $y_n \neq y_0$, $y_n \to y_0$, $n \to \infty$. Wegen Stetigkeit von f^{-1} gilt $\underbrace{f^{-1}(y_n)}_{=x_n} \xrightarrow{n\to\infty} \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{=x_0}$, oder $x_0 \xrightarrow{n\to\infty} x_n$.

Berechne

$$\frac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(y_0)}{y_n-y_0} = \frac{x_n-x_0}{f(x_n)-f(x_0)} = \left(\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\right)^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} \left(f'(x_0)\right)^{-1}.$$

□

Satz 5.11 (Kettenregel)**.** Seien $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $g\colon D_g \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. f in $x_0 \in D_f$ differenzierbar, g in $y_0 = f(x_0) \in D_g$ differenzierbar. Dann ist $(g \circ f) : D_f \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 und es gilt die Kettenregel

$$\left(g \circ f\right)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis. Definiere die Funktion $\Delta g\colon D_g \to \mathbb{R}$, mit $\Delta g(y) = \begin{cases}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & y \neq y_0 = f(x_0)\\ g'(y_0) & y = y_0\end{cases}.$

g in y_0 differenzierbar $\implies \exists g'(y_0) \implies \lim_{y\to y_0}\Delta g(y) = g'(y_0)$.

Für $y \in D_g$ gilt $g(y) = g(y_0) + \Delta g(y)(y-y_0)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(x_0) &\overset{\text{Def.}}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{g(\overbrace{f(x)}^{y}) - g(\overbrace{f(x_0)}^{y_0})}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\Delta g(f(x)) \cdot \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ &= g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).\end{aligned}$$

□

Beispiel 5.12. Für $x > 0$
$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$
$\ln x$ auf $]0, \infty[$ ist stetig differenzierbar.
$$\ln'(y) = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

$y = e^x$

Trick: $y = u^v$, $u = u(x), v = v(x)$
$$\begin{aligned}
\ln y &= v \ln u \\
\frac{1}{y} \cdot y' &= v' \ln u + v \cdot \ln + v \cdot (\ln u)' = v' \ln u + v \frac{1}{u} u' \\
\implies y' &= y(v' \ln u + v \frac{1}{u} u') \\
\implies (u^v)' &= u^v (v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} u') = u^v \cdot \ln u \cdot v' + u^{v-1} \cdot v \cdot u'.
\end{aligned}$$

$y = \frac{(x^2+2) \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} e^x}{(x+5)^3} = g(x)$
$\ln y = \ln(x^2 + 2) + \frac{3}{4}(x - 1) + x - 3 \ln(x + 5)$

5.2 Mittelwertsatz und Satz von Rolle

Definition 5.13 (globales / lokales Extremum)**.** Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein globales Extremum (Maximum oder Minimum), falls gilt $f(x_0) \geq f(x)$ bzw. $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in D$.

Die Funktion f hat in $x_0 \in D$ ein lokales Extremum (Maximum oder Minimum), falls $\exists \delta > 0$, s.d. $f(x_0) \geq f(x)$ bzw. $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in B_\delta(x_0) \cap D =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

Satz 5.14. Sei $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $a < x_0 < b$. Ist f in x_0 differenzierbar, und ist x_0 ein lokales Extremum, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Sei x_0 ein lokales Maximum, dann $\exists \delta > 0$, s.d. $f(x) - f(x_0) \leq 0 \, \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap (a, b)$:
$$f'(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \underbrace{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)}_{\leq 0} = \lim_{x \nearrow x_0} \underbrace{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)}_{\geq 0}.$$

$\implies f'(x_0) = 0$. Analog für Minimum □

Bemerkung 5.15.

1. $a < x_0 < b$ ist wichtig! z.B.: $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ $f(x) := x$. Maximum bei $x = 1$, Minimum bei $x = 0$ mit Ableitung $f'(x) = 1 \neq 0$.

2. $f'(x_0)$ nur eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum, z.B.: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2 \implies f'(0) = 0$, aber $x = 0$ ist kein lokales Extremum.

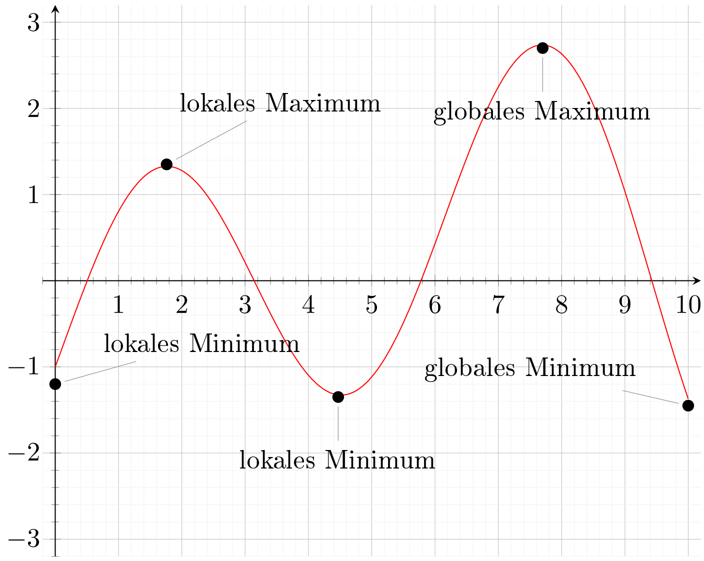


Abbildung 5.3: Beispiel für Extrema

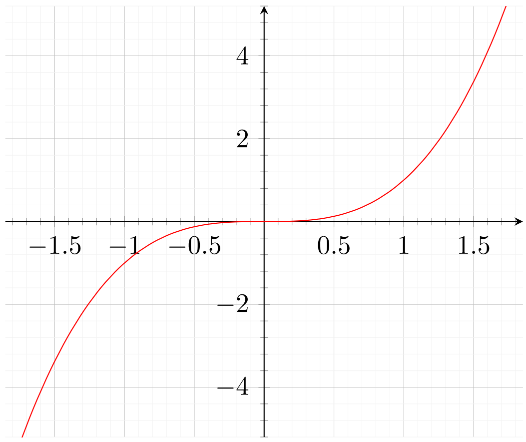


Abbildung 5.4: x^3 hat bei $x = 0$ kein lokales Extremum

Satz 5.16 (Satz von Rolle)**.** Es sei $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$, f auf (a,b) differenzierbar.

Dann ex. ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Ist $f(x) = f(a)\ \forall x \in [a,b] \implies$ Behauptung $\forall \xi \in]a,b[$.

Nun f nicht konstant. $[a,b]$ ist kompakt und f ist stetig, d.h. f nimmt Minimum und Maximum an. $\implies \exists x_{\min}, x_{\max} \in [a,b]$ mit $f(x_{\min}) = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ und $f(x_{\max}) = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. Da f nicht konstant $\implies f(x_{\min}) < f(a) = f(b)$ oder $f(x_{\max}) > f(a) = f(b)$.
$\implies x_{\min} \in (a,b)$ oder $x_{\max} \in (a,b)$
$\overset{\text{Satz 5.14}}{\implies} f'(x_{\min}) = 0$ oder $f'(x_{\max}) = 0$
$\implies$ Behauptung gilt mit $\xi = x_{\min}$ oder $\xi = x_{\max}$. $\square$

Satz 5.17 (Mittelwertsatz)**.** Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf $]a,b[$. Dann ex. ein $\xi \in\,]a,b[$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Beweis. Hilfsfunktion $g(x) := f(x) - f(a) - m(x-a)$ mit $m := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Damit folgt $g(a) = g(b) = 0 \overset{\text{Satz 5.16}}{\Longrightarrow} \exists \xi \in\,]a,b[$ mit $g'(\xi) = 0 \implies f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. □

Satz 5.18 (Monotoniekriterium)**.** Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf $D \subset \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt

(i) f monoton wachsend $\iff f'(x) \geq 0\ \forall x \in D$

(ii) f streng monoton wachsend $\iff f'(x) > 0\ \forall x \in D$

Für fallende Funktionen ersetze f durch $-f$.

Beweis. Es gilt $\forall a < b \in D$ nach Satz 5.17

$$f(b) - f(a) = \underbrace{(b-a)}_{>0} f'(x) \qquad (*).$$

für ein $x \in\,]a,b[$. Daraus folgt direkt (ii) und (i, „ $\Longleftarrow$ ”)

Für (i, „ $\Longrightarrow$ ”): Betrachte in $(*)$:

$$\lim_{b\to a} \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\geq 0} = f'(a) \geq 0.$$

□

Satz 5.19. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt f ist konstant auf $D \iff f' \equiv 0$ auf D

Beweis. „ $\Longrightarrow$ ” klar.

„ $\Longleftarrow$ ”: Für $a < b \in D$ gilt $f(b) - f(a) = (b-a)\underbrace{f'(x)}_{=0}$, $x \in\,]a,b[\implies f(b) = f(a)$. □

5.3 Höhere Ableitungen und Satz von Taylor

Definition 5.20. Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann sagt man: f ist zweimal differenzierbar und $f''\colon D \to \mathbb{R}$ heißt die zweite Ableitung von f.

Analog wird die n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f definiert mit $f^{(0)} := f$, die „nullte" Ableitung. Schreibe

$$\frac{d^n f}{dx^n} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^n f \quad \text{oder} \quad \frac{d^n}{dx^n} f.$$

Definition 5.21 ($C^n(D, \mathbb{R})$)**.** Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar auf D, falls f auf D differenzierbar und $f'\colon D \to \mathbb{R}$ stetig ist. Schreibe $f \in C^1(D, \mathbb{R})$.

f heißt n-mal stetig differenzierbar auf D ($f \in C^n(D, \mathbb{R})$), falls f n-mal differenzierbar und $f^{(n)}\colon D \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Bemerkung 5.22.

1. Ist f beliebig oft differenzierbar, dann gilt $f \in C^\infty(D, \mathbb{R})$ bzw. f ist glatt auf D.
2. f stetig auf D, dann gilt $f \in C^0(D, \mathbb{R})$.
3. $f \in C^n(D, \mathbb{R}) \implies f^{(k)}$ stetig auf D $\forall 0 \le k \le n$.

Satz 5.23 (Satz von Taylor)**.** Jede Funktion $f \in C^{n+1}(D, \mathbb{R})$ lässt sich für $x, x_0 \in D$ nach Potenzen von $(x - x_0)$ entwickeln:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} + R_{n+1}(x).$$

Dabei ist das Restglied $R_{n+1}(x)$:

$$R_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

mit ξ ein Punkt zwischen x_0 und x ($\xi = x_0 + \tau(x - x_0)$, $\tau \in (0, 1)$).

Der Ausdruck

$$T_n(x) = T_n(f, x, x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

heißt Taylorpolynom n-ter Ordnung von f bei x_0.

Beweis. Für $x = x_0$: klar.

Sei $x \neq x_0$. Betrachte $R = R(x, x_0)$ definiert durch $f(x) = T_n(f, x, x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot R$.

Für $y \in D$ definiere

$$\varphi(y) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x - y)^k - \frac{(x - y)^{n+1}}{(n+1)!}R.$$

Dann folgt $\varphi(x_0) = 0 = \varphi(x)$, $\varphi \in C^1$.

$\overset{\text{Satz von Rolle}}{\Longrightarrow}$ $\exists \xi$ zwischen x und x_0 mit $\varphi'(\xi) = 0$.

$$\begin{aligned}
0 = \varphi'(\xi) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} k(x-\xi)^{k-1}(-1) + \frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(n+1)!} R \\
&\overset{\text{Teleskop}}{=} -\frac{f^{n+1}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{(x-\xi)^n}{n!} R \\
&= \frac{(x-\xi)^n}{n!}\left(-f^{(n+1)}(\xi) + R\right).
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $R = f^{(n+1)}(\xi)$, ξ zwischen x und x_0. □

Satz 5.24. Sei f auf einem beschränkten Intervall (a,b) eine C^∞ Funktion mit gleichmäßig beschränkten Ableitungen.

$$\sup_{x\in(a,b)} \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M < \infty.$$

Dann ist f auf (a,b) analytisch, d.h. $\forall x, x_0 \in (a,b)$ konvergiert die Taylor-Reihe von f und es gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Beweis.

$$|f(x) - T_n(f,x,x_0)| \leq \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

$\Longrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon$, s.d. $\frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} < \varepsilon$ □

Bemerkung 5.25. 1. Eine C^∞ Funktion muss nicht analytisch sein.

2. Ist $f \in C^n$ mit $f(n) \equiv 0$ auf D, dann ist f ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich $n-1$, da

$$f(x) = T_{n-1}(f,x,x_0) + \underbrace{R_n(x,x_0)}_{=0}.$$

Korrolar 5.26 (Lokale Extrema)**.** Sei $f \in C^n(D,\mathbb{R})$, $D = (a,b)$ und für $x_0 \in (a,b)$ gelte

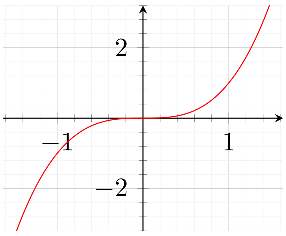
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gilt

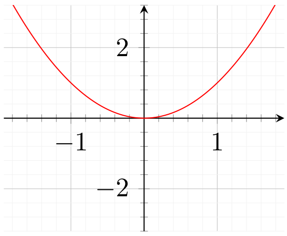
1. Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$ bzw. $f^{(n)}(x_0) > 0$, dann ist x_0 ein lokales Maximum bzw. lokales Minimum von f.
2. Ist n ungerade, dann ist x_0 kein lokales Extremum von f (Sattelpunkt, Wendepunkt).

Beweis. Satz von Taylor $\Longrightarrow$ $f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$ $f^{(n)}$ stetig in x_0, $f^{(n)} \neq 0$ in x_0 $\Longrightarrow$ $\exists \delta > 0$, s.d. $f^{(n)}(x) \neq 0$ für $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$ und hat das gleiche Vorzeichen wie $f^{(n)}(x_0)$.

(a) $f(x) = x^3$



(b) $f(x) = x^2$



1. n gerade $\implies (x - x_0)^n > 0$, falls $x \neq x_0$.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \underbrace{(x - x_0)^n}_{>0}.$$

$\implies$ Wegen $f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(\xi)$ folgt $f(x) > f(x_0)$, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$ und $f(x) < f(x_0)$, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$.

2. n ungerade, wechselt $(x - x_0)^n$ das Vorzeichen.

□

Korrolar 5.27. Sei $f \in C^2((a, b), \mathbb{R})$ und $x_0 \in (a, b)$. Dann folgt

(i) x_0 ist ein lokales Minimum von $f \implies f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) \geq 0$

(ii) x_0 ist ein lokales Maximum von $f \implies f'(x_0) = 0, f''(x_0) \leq 0$.

Beweis. klar. □

Korrolar 5.28 (Hinreichende Optimalitätsbedingung)**.** Sei x_0 mit $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0$. Dann ist x_0 ein lokales Minimum.

Beweis. trivial. □

5.4 Die Regeln von de l'Hospital

Ziel: Grenzwerte zu berechnen für $x \to \pm\infty$ oder $f(x) \to \pm\infty$. Grenzwerte vom Typ:

$$\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, \infty^\infty, \ldots\right).$$

Lemma 5.29 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz)**.** Seien f, g im Intervall $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar, $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$. Dann $\exists$ ein $c \in (a, b)$ s.d. gilt

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Beweis. ohne Beweis. □

Satz 5.30 (1. Regel von de l'Hospital)**.** Seien $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $I := (a,b)$ und $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit

$$\lim_{x \nearrow b} f(x) = 0 = \lim_{x \nearrow b} g(x).$$

Es gelte $g'(x) \neq 0\ \forall x \in I$ und $\lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$. $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Dann gilt:

$$g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \text{ und } \lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Analoge Aussagen gelten für $x \searrow a$.

Beweis. f, g in b stetig $\implies f(b) = g(b) = 0$. $g'(x) \neq 0 \implies$ keine weiteren Nullstellen von g in (a,b), d.h. $g(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$.

Wir nutzen den verallgemeinerten Mittelwertsatz. $\implies \exists \xi \in (a,b)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Aus $x \nearrow b$ folgt $\xi \nearrow b \implies$ Behauptung. □

Beispiel 5.31.

1.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

2.
$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\cos x}{2x} = +\infty$$

3.
$$\lim_{x \searrow 0} \frac{(\sin x)^2}{x^2} = \lim_{x \searrow 0} \frac{2\sin(x) \cdot \cos(x)}{2x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{2(\cos^2 x - \sin^2(x)}{2} = 1.$$

Satz 5.32 (2. Regel von de l'Hospital)**.** Seien $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $I := (a,b)$ und $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\lim_{x \nearrow b} g(x) = \pm\infty$, $g'(x) \neq 0\ \forall x \in I$.

$$\lim_{x \nearrow b} f(x) = \pm\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Dann gilt: $\exists x_0 \in I$ mit $g(x) \neq 0$ für $a < x_0 \leq x < b$ und

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Analoge Aussage für $x \searrow a$.

Beweis. Rannacher. □

Bemerkung 5.33. 1. Grenzprozesse für $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Substitution $y = \frac{1}{x}$, ($y \to 0$ für $x \to \pm\infty$).

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{f(\frac{1}{y}}{g(\frac{1}{y})}.$$

2. $0 - \infty$

$$\lim_{x\nearrow b} f(x) = 0, \lim_{x\nearrow b} g(x) = \infty.$$

$$\lim_{x\nearrow b} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)^{-1}} \sim \frac{0}{0}.$$

3. $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to b} f(x) = \infty, \lim_{x\to b} g(x) = \infty.$$

$$\lim_{x\to b}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to b}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right) = \lim_{x\to b} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}} \sim \frac{0}{0}.$$

4. $f(x) \to 1,\ g(x) \to \infty$
   $f(x) \to \infty,\ g(x) \to 0$
   $f(x) \to 0,\ g(x) \to 0$
   $\lim f(x)^{g(x)}$?

   Logarithmiere $f(x)^{g(x)} = A$.

$$\ln A = g(x)\cdot \ln f(x).$$

   $\lim A = \exp(\lim g(x)\cdot \ln(f(x)))$

Kapitel 6

Integration

Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ziel: Fläche unter dem Graphen berechnen.

6.1 Riemannintegral

Definition 6.1 (Zerlegungen, Stützpunkte)**.** Eine endliche Zerlegung Z von einem (beschränkten) Intervall $[a,b]$ ist eine endliche Folge $z = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ mit $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$. x_k heißen Teilungs- oder Stützpunkte. Die Intervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ heißen Teilintervalle. $h := \max_{k=1\dots n} |x_k - x_{k-1}|$ heißt Feinheit der Zerlegung.

Eine Zerlegung mit $|x_k - x_{k-1}| = h \ \forall k$ heißt äquidistant.

$\mathcal{Z}(a,b) =$ Menge aller Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$

Definition 6.2 (Ober- und Untersumme)**.** Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, d.h. $\exists M \in \mathbb{R}$, s.d. $|f(x)| \leq M \ \forall x \in [a,b]$.

Die Riemannschen Ober- / Untersummen sind

$$\overline{S}_Z(f) := \sum_{k=1}^{n} \sup_{x \in I_k} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

bzw.

$$\underline{S}_Z(f) := \sum_{k=1}^{n} \inf_{x \in I_k} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Bemerkung 6.3. Eine Verfeinerung der Zerlegung Z ist eine Zerlegung $Z'' = (x''_0, \dots, x''_{n''})$ s.d. $(x_0, \dots, x_n) \subset (x''_0, \dots, x''_{n''})$ und $h'' \leq h$. Zu Zerlegungen $Z = (x_0, \dots, x_n)$ und $Z' = (x'_0, \dots, x'_{n'})$ gibt es eine gemeinsame Verfeinerung Z''

$$\begin{gathered}(x_0, \dots, x_n) \subset (x''_0, \dots, x''_{n''}) \\ (x'_0, \dots, x'_{n'}) \subset (x''_0, \dots, x''_{n''}) \\ .\end{gathered}$$

und $h'' \leq \min\{h, h'\}$

Bemerkung 6.4. Seien Z_1, Z_2 Zerlegungen und Z_1 feiner als Z_2 ist, dann gilt

$$\inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \cdot (b-a) \leq \underline{S}_{Z_2}(f) \leq \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \leq \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \cdot (b-a).$$

Definition 6.5 (Ober-/Unterintegral)**.** Das Ober- / Unterintegral von f sind definiert durch

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\{\overline{S}_Z(f) \mid z \in Z(a,b)\}.$$

bzw.

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup\{\underline{S}_Z(f) \mid z \in Z(a,b)\}.$$

Lemma 6.6. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ex. für f das Ober- und Unterintegral und für jede Folge von Zerlegungen $Z_n \in \mathcal{Z}(a,b)$, $n \in \mathbb{N}$ mit $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_{Z_n}(f) = \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_{Z_n}(f).$$

Beweis. Rannacher. □

Definition 6.7 (Riemann-Integral)**.** Sind Ober- und Unterintegral für eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gleich, so heißt der gemeinsame Wert das (bestimmte) Riemann-Integral für f über $I = [a,b]$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Die Funktion f heißt Riemann-integrierbar.

Satz 6.8 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)**.** Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann auf $I = [a,b]$ integrierbar, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$, s.d. $|\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| < \varepsilon$.

Beweis. ohne Beweis. □

Definition 6.9 (Riemann-Summen)**.** Sei $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, $i = 1 \ldots n$.

$$RS_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

heißt eine Riemann-Summe von f.

Satz 6.10. Eine beschränkte Funktion $f\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann R.-integrierbar wenn $\forall$ Folgen $Z_n \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ alle zugehörigen R.-Summen zu dem selben

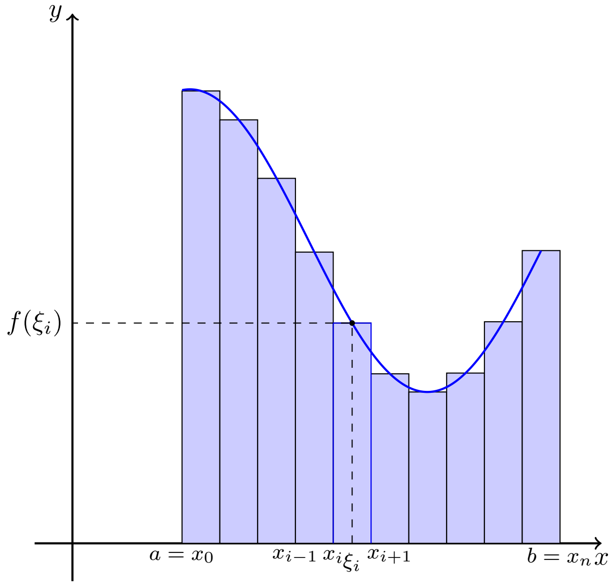


Abbildung 6.1: Riemannsche Summen

Limes konvergieren.

$$RS_{Z_n}(f) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis. „ $\Longrightarrow$ ": Sei f R.-integrierbar. Sei $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit Feinheit h. Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underbrace{RS_Z(f)}_{\forall \xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)} \leq \overline{S}_Z(f).$$

Aus der Konvergenz $|\underline{S}_Z(f) - \overline{S}_Z(f)| \to 0$, $n \to \infty \overset{\text{Sandwich}}{\Longrightarrow} RS_z \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx$.

„ $\Longleftarrow$ " Seien alle R.-Summen konvergent gegen denselben Limes. Sei $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$, $\varepsilon > 0$ beliebig. Offenbar $\exists$ R.-S. $\underline{RS}_Z(f)$, $\overline{RS}_Z(f)$ s.d. $\underline{RS}_Z(f) - \varepsilon \leq \underline{S}_Z(f)$ und $\overline{S}_Z(f) \leq \overline{RS}_Z(f) + \varepsilon$.

Dann

$$\underbrace{\underline{RS}_Z(f)}_{\xrightarrow{h\to 0}\int_a^b f(x)dx} -\varepsilon \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq \underbrace{\overline{RS}_Z(f)}_{\xrightarrow{h\to 0}\int_a^b f(x)dx} +\varepsilon.$$

Wegen ε beliebig folgt:

$$\left|\underline{S}_Z(f) - \overline{S}_Z(f)\right| \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

$\square$

Satz 6.11. Eine stetige Funktion $f\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Beweis. $I = [a,b]$ kompakt $\Longrightarrow$ f auch gleichmäßig stetig $\Longrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$, s.d. $\forall x, x' \in I$ mit $|x - x'| < \delta_\varepsilon$ gilt $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Sei $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit Feinheit $h < \delta_\varepsilon$, dann

$$\begin{aligned} |\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| &\le \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left| \sup_{x\in I_k} f(x) - \inf_{x \in I_k} f(x) \right|}_{<\varepsilon} \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &< \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

$\implies |\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| \to 0,\ h \to 0$
$\implies f$ Riemann-integrierbar. □

Satz 6.12. Eine beschränkte monotone Funktion $f\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Beweis. Sei f monoton steigend. Dann gilt $f(a) \le f(x) \le f(b)$, $x \in I$.

Sei $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit h.

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})(f(x_k) - f(x_{k-1})) \le h \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = h(f(b) - f(a)).$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann wähle $h_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ ($f(b) \neq f(a)$, sonst trivial). Dann gilt für $h < h_\varepsilon$

$$\left|\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)\right| < \varepsilon.$$

□

Beispiel 6.13. Nicht alle beschränkte Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ sind R.-integrierbar, z.B.:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

$I = [0,1]$. $\underline{S}_Z(f) = 0 \neq 1 = \overline{S}_Z(f)$.

6.2 Eigenschaften des Riemann-Integrals

Satz 6.14 (Additivität).
1. Eine (beschr.) R.-integrierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist auch über jedem Teilintervall $[a',b'] \subset [a,b]$ R.-integrierbar. Insb. gilt für $c \in (a,b)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad (*).$$

2. Ist eine (beschr.) Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ für ein $c \in (a,b)$ über $[a,c]$ und $[c,b]$ R.-integrierbar, dann ist f über $[a,b]$ integrierbar und es gilt $(*)$.

Beweis. ohne Beweis. □

Korrolar 6.15. Eine beschränkte Funktion $f\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}$, welche bezüglich einer Zerlegung $Z = (x_0, \dots, x_n)$ von I stückweise stetig ist oder stückweise monoton ist, ist über

I Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$

Beispiel 6.16.

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

auf $I = [0,1]$ ist $f(x)$ R.-integrierbar. Auf I hat $f(x)$ eine Unstetigkeit bei $x = 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann $\exists \delta \in [0,1]$, s.d.

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \cdot \delta < \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Auf $[\delta, 1] f(x)$ stetig und R.-integrierbar. Dann ex. eine Zerlegung $Z_\delta \in \mathcal{Z}(\delta, 1)$, s.d.

$$|\overline{S}_{Z_\delta}(f) - \underline{S}_{Z_\delta}(f)| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Ergänze Z_δ um das Intervall $[0,\delta] \implies Z \in \mathcal{Z}(0,1)$. Und es gilt

$$|\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| \leq |\overline{S}_{Z_\delta}(f) - \underline{S}_{Z_\delta}(f)| + 2 \sup_{x\in[0,\delta]} |f(x)| \cdot \delta < \varepsilon.$$

Satz 6.17 (Linearität)**.** Seien $f, g\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}$ (beschränkt) R.-integrierbar. Dann ist $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ über I R.-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Es ex. $RS_Z(f)$ und $RS_Z(g)$ s.d.

$$\lim_{h\to 0} RS_Z(f) = \int_a^b f(x)dx$$
$$\lim_{h\to 0} RS_Z(g) = \int_a^b g(x)dx.$$

o.B.d.A. Z und ξ_k sind gleich für f und g. Damit folgt

$$\begin{aligned} RS_Z(\alpha f + \alpha g) &:= RS_Z(\alpha f) + RS_Z(\beta g) = \alpha RS_Z(f) + \beta RS_Z(g) \\ \implies \quad \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx &= \alpha \lim_{h\to 0} RS_Z(f) + \beta \lim_{h\to 0} RS_Z(g) \\ &= \lim_{h\to 0}(\alpha \cdot RS_Z(f)) + \lim_{h\to 0}(\beta \cdot RS_Z(g)) \\ &= \lim_{h\to 0} RS_Z(\alpha f) + \lim_{h\to 0} RS_Z(\beta g) \\ &= \lim_{h\to 0} RS_Z(\alpha f + \beta g) \\ &= \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx. \end{aligned}$$

□

Satz 6.18 (Monotonie des Riemann-Integrals)**.** Seien $f, g\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}$ (beschränkte) R.-integrierbare Funktionen mit $g(x) \geq f(x)\ \forall x \in [a,b]$. Dann gilt

$$\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis. Es gilt für Zerlegung Z und $\xi_k \in I_k$:

$$RS_Z(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = RS_Z(g).$$

Für $h \to 0$ folgt die Behauptung. □

Korrolar 6.19. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ (beschr.) R.-integrierbare Funktion, $m \leq f(x) \leq M$. Dann gilt

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Beweis. $g \equiv 1 \implies \int_a^b 1dx = (b-a)$ Damit folgt

$$m(b-a) = \int_a^b m \cdot dx \overset{\text{Satz 6.18}}{\leq} \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx = M(b-a).$$

□

Korrolar 6.20. Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei beschr. R.-integrierbare Funktionen. Dann gilt

(a) $f_+ := \max\{f, 0\}$ und $f_- := \min\{f, 0\}$ sind R.-integrierbar

(b) $|f|$ ist R.-integrierbar und es gilt

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

(c) $\forall p \in [1, \infty)$ ist $|f|^p$ R.-integrierbar

(d) $f \cdot g$ ist R.-integrierbar.

Beweis. (a) $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$.

$$0 \leq \overline{S}_Z(f_+) - \underline{S}_Z(f_+) \leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)$$
$$0 \leq \overline{S}_Z(f_-) - \underline{S}_Z(f_-) \leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f).$$

Falls $|\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| \xrightarrow{h \to 0} 0 \implies |\overline{S}_Z(f_\pm) - \underline{S}_Z(f_\pm)| \xrightarrow{h \to 0} 0 \implies$ Beh.

(b) $|f| = f_+ - f_- \overset{\text{Linearität}}{\implies} |f|$ R.-integrierbar. $f \leq |f|, -f \leq |f| \overset{\text{Monotonie}}{\implies} \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \implies \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

(c) Sei $M = \sup_{x\in[a,b]} |f| \overset{\text{linear}}{\Longrightarrow} \frac{|f|}{M}$ integrierbar. $0 \leq \frac{|f|}{M} \leq 1 \implies$ z.Zg.: $|f|^p$ integr. für $0 \leq f \leq 1$.

Sei $0 \leq x \leq y \leq 1$. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt

$$\begin{aligned} y^p - x^p &= p \cdot \xi^{p-1}(y-x) \\ \implies |y|^p - |x|^p &= p \cdot |\xi|^{p-1}(|y|-|x|) \leq p\,(|y|-|x|)\,. \end{aligned}$$

Für $Z \in \mathcal{Z}(0,1)$ gilt

$$\underbrace{\overline{S}_Z(|f|^p) - \underline{S}_Z(|f|^p)}_{\xrightarrow{h\to 0} 0} \leq p\,\underbrace{(\overline{S}_Z(|f|) - \underline{S}_Z(|f|))}_{\Longleftarrow \xrightarrow{h\to 0} 0}.$$

(d) $f \cdot g = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$ und c).

$\square$

Bemerkung 6.21. Im Allgemeinen ist

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \neq \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right).$$

Korrolar 6.22 (Definitheit des R.-Integrals)**.** Sei $f\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \implies f \equiv 0.$$

Beweis. durch Kontraposition. Sei $f \not\equiv 0$, d.h. $\exists x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) > 0. \overset{f\text{ stetig}}{\Longrightarrow} \exists I_\varepsilon := [x_0, x_0+\varepsilon]$ oder $I_\varepsilon := [x_0-\varepsilon, x_0]$, s.d. $f(x) \geq \delta > 0\ \forall x \in I_\varepsilon$.

Sei $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit h klein genug, s.d. für ein k $I_k \subset I_\varepsilon$. Dann gilt

$$0 < \delta(x_k - x_{k-1}) \leq \inf_{x\in I_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) \leq \underline{S}_Z(f) \leq \int_a^b f(x)dx.$$

$\square$

Definition 6.23. Sei $a \leq b$ Dann ist

$$\begin{aligned} \int_b^a f(x)dx &:= -\int_a^b f(x)dx \\ \int_a^a f(x)dx &:= 0. \end{aligned}$$

Satz 6.24 (1. Mittelwertsatz)**.** Sei $f\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $g\colon I \to \mathbb{R}$ R.-integrierbar. g habe in I keinen Vorzeichenwechsel. Dann $\exists \xi \in [a,b]$ s.d. gilt

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Sei $g \geq 0$ (o.B.d.A.). f stetig $\implies \exists m = \min_{x\in I} f(x)$, $M = \max_{x\in I} f(x)$. Dann folgt

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

Betrachte $\varphi(t) := (m(1-t) + M\cdot t)\int_a^b g(x)dx$, $t \in [0,1]$. Nach ZWS $\exists \theta \in [0,1]$, s.d.

$$\begin{aligned}
\varphi(\theta) &= y = (m(1-\theta) + M\cdot\theta)\int_a^b g(x)dx \\
\varphi(0) &\leq y \leq \varphi(1) \\
m\int_a^b g(x)dx &\leq y \leq M\int_a^b g(x)dx \\
\implies \int_a^b f(x)g(x)dx &= \mu\int_a^b g(x)dx.
\end{aligned}$$

Nach dem ZWS für f $\exists \xi \in [a,b]$, s.d. $f(\xi) = \mu \in [m,M]$. $\square$

Korrolar 6.25. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig.

1. $\exists \xi \in I$, s.d. $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$
2. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $m \leq f(x) \leq M$. $x \in I$. Sei $g\colon I \to \mathbb{R}$ R.-integrierbar mit $g \geq 0$. Dann gilt

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

Bemerkung 6.26. Voraussetzungen sind unverzichtbar!

Stetigkeit: $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ unstetig.

$$f(\xi)(b-a) = f(\xi)\cdot 2 = \begin{cases} 0 & 0 \leq \xi < 1 \\ 2 & 1 \leq \xi \leq 2 \end{cases} \neq 1 = \int_0^2 f(x)dx.$$

Positivität: $f(x) = x$, $g(x) = \begin{cases} -1 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$.

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 (-x)dx + \int_1^2 xdx = -\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

aber

$$\xi\cdot\int_0^2 g(x)dx = \xi\cdot 0 = 0 \quad \forall \xi \in [0,2].$$

6.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 6.27 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** Es sei $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

(a) Die Funktion $F_0\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $F_0(x) := \int_a^x f(t)dt$ ist stetig differenzierbar auf $[a,b]$ und

$$F_0'(x) = f(x) \quad x \in [a,b] \quad (*).$$

Jede Funktion $F \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ welche $(*)$ erfüllt, heißt Stammfunktion von f.

(b) Jede Stammfunktion F von f hat die Form

$$F(x) = C + \int_a^x f(t)dt = C + F_0(x).$$

(c) Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \text{ d.h. insb. } \int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a) \quad \forall F \in C^1([a,b],\mathbb{R}).$$

Beweis. (a) Für $h \neq 0$, $x \in [a,b]$

$$\frac{F_0(x+h) - F_0(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \overset{1.\text{ MWS}}{=} \frac{1}{h} f(\xi_h)\cdot h \xrightarrow[h\to 0]{f \text{ stetig}} f(x)$$

$$\implies F_0'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F_0(x+h) - F_0(x)}{h} = f(x).$$

(b) Sei F eine Stammfunktion von f, dann gilt $(F - F_0)' = f - f = 0 \overset{\text{MWS Diff.}}{\implies} F - F_0 \equiv$ konstant $= C \implies F = F_0 + C$ für ein $C \in \mathbb{R}$.

(c) $F(b) - F(a) \overset{\text{(b)}}{=} F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f(t)dt$

□

Bemerkung 6.28. 1. $F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b \implies \int_a^b F'(t)dt = F(x)\Big|_a^b$.

Man bezeichnet eine Stammfunktion auch als unbestimmtes Integral

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

(math. nicht korrekte Bezeichnung)

2. Integration und Differentiation sind inverse zu einander

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$
$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt.$$

Korrolar 6.29 (2. Mittelwertsatz)**.** Seien $f\colon I \to \mathbb{R}$ monoton, $g\colon I \to \mathbb{R}$ R.-integrierbar. Dann ex. $\xi \in [a,b]$ s.d.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx.$$

Beweis. o.B.d.A: f monoton fallend.

Definiere $\phi(t) := f(a)\int_a^t g(x)dx + f(b)\int_t^b g(x)dx$, $a \le t \le b$. Nach HDI $\phi(t)$ stetig.

$$\varphi(a) = f(b)\int_a^b g(x)dx \overset{f \text{ monoton fallend}}{\le} \int_a^b f(x)g(x)dx \le f(a)\int_a^b g(x)dx = \varphi(b).$$

Nach ZWS $\exists \xi \in [a,b]$ s.d. $\varphi(\xi) = \int_a^b f(x)g(x)dx$. □

Bemerkung 6.30. Monotonie unverzichtbar. $f(x) = x^2$, $g(x) = 1$, $I = [-1,1]$.

$$f(-1)\int_{-1}^\xi g(x)dx + f(1)\int_\xi^1 g(x)dx = \int_{-1}^1 1dx = 2 \quad \forall \xi \in I$$
$$\int_{-1}^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \neq 2.$$

6.4 Integrationsformeln

Lemma 6.31 (Partielle Integration)**.** $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)\cdot g(x)]\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Beweis. $(f\cdot g)'(x) = f'\cdot g + f\cdot g' \implies$

$$\int_a^b (f'\cdot g + f\cdot g')(x)dx = \int_a^b (f\cdot g)'(x)dx \overset{\text{HDI}}{=} (f\cdot g)(x)\Big|_a^b.$$

□

Beispiel 6.32.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \cos^2(x) &= \int_a^b \cos x\cdot\cos x dx \\
&= \cos x\cdot\sin x\Big|_a^b - \int_a^b (-\sin x)\sin x dx \\
&= \cos x\cdot \sin x|Big_a^b + \int_a^b (1-\cos^2(x))dx \\
\implies 2\int_a^b \cos^2(x)dx &= \cos x\cdot\sin x\Big|_a^b + \int_a^b dx.
\end{aligned}$$

Lemma 6.33. Seien $[a,b],[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$, $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, $\varphi\colon[\alpha,\beta]\to[a,b]$ stetig differenzierbar mit $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f. Dann $F\circ\varphi\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar und

$$(F\circ\varphi)'=(F'(\varphi(t)))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int_\alpha^\beta(F\circ\varphi)'(t)dt=(F\circ\varphi)(t)\Big|_\alpha^\beta=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}f(x)dx.$$

□

Bemerkung 6.34. Formal: $x=\varphi(t)$

$$\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)\implies dx=\varphi'(t)dt$$

$$\int_{\varphi(\alpha)=a}^{\varphi(\beta)=b}f(x)dx=\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Beispiel 6.35.

$$\int_0^2 t\cdot\cos(\underbrace{t^2+t}_{x})dt=\frac{1}{2}\int_0^2\cos(\underbrace{t^2+t}_{\varphi(t)})\cdot 2tdt=\frac{1}{2}\int_{\varphi(0)=1}^{\varphi(2)=5}\cos x dx.$$

6.5 Uneigentliche Integrale

Satz 6.36 (Uneigentliches R.-Integral Typ 1)**.** Sei $f\colon(a,b]\to\mathbb{R}$ auf $(a,b]$ R.-integrierbar, d.h. f R.-integrierbar auf $\forall[a',b]\subset(a,b]$, aber nicht auf $[a,b]$.

Falls für alle Folgen $a_n\in(a,b]$ ex.

$$\lim_{a_n\searrow a}\int_{a_n}^b f(x)dx=:\int_a^b f(x)dx.$$

Dann gilt: Dieser Limes ist von der Wahl der Folge a_n unabhängig und heißt das uneigentliche Integral von f über $[a,b]$.

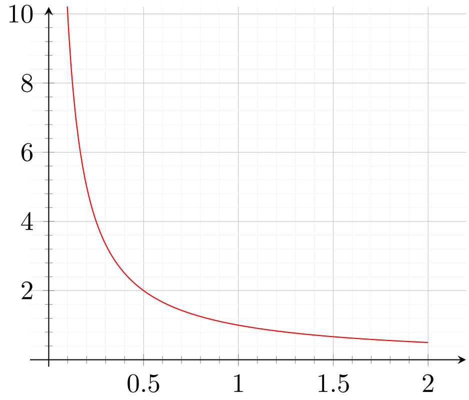
Beweis. Sei $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge mit

$$\lim_{a_n\searrow a}\int_{a'}^b f(x)dx=A'.$$

Konstruiere Folge $\{a_1,a'_1,a_2,a'_2,\ldots\}=(a''_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach Voraussetzungen

$$\exists\lim_{a''_n\searrow a}\int_{a''}^b f(x)dx=A''.$$

Alle Teilfolgen konvergenter Folgen, konvergieren gegen denselben Limes wie die Gesamtfolge $\implies A''=A'$. □



Lemma 6.37. Sei $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ auf $(a,b]$ aber nicht auf $[a,b]$ integrierbar.

Falls das uneigentliche Integral von $|f|$ auf $[a,b]$ ex., dann ex. das uneigentliche Integral von f über $[a,b]$ und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0, \varepsilon < b-a$. Betrachte

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = \int_{a+\varepsilon}^b \frac{|f(x)|+f(x)}{2}dx - \int_{a+\varepsilon}^b \frac{|f(x)|-f(x)}{2}dx.$$

Integrale sind gleichmäßig beschränkt.

$$\frac{|f(x)|+f(x)}{2} > 0 \quad \forall x \text{ und } \frac{|f(x)|-f(x)}{2} > 0 \quad \forall x.$$

$\implies \int_{a+\varepsilon}^b \dots dx$ monoton wachsend für $\varepsilon \to 0$ und

$$\left| \int_{a+\varepsilon}^b \frac{|f(x)|+f(x)}{2}dx \right| + \left| \int_{a+\varepsilon}^b \frac{|f(x)|-f(x)}{dx} \right| \leq \frac{4}{2}\int_{a+\varepsilon}^b |f(x)|dx \leq 2\int_a^b |f(x)|dx.$$

$\implies$ Für $\varepsilon \to 0$:

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx.$$

$\square$

Bemerkung 6.38.

1. Umkehrung der Aussage (d.h. f uneigentlich integrierbar $\implies |f|$ uneigentlich integrierbar) ist i.A. nicht richtig.

   „einfache" Konvergenz, d.h. $\exists \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$.

   „absolute" Konvergenz / absolut uneigentlich integrierbar, d.h. $\exists \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b |f(x)|dx$.

2. Sei $\int_a^b f(x)dx$ bei b uneigentlich und bei a nicht uneigentlich, dann definiert man das uneigentliche Integral

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt \quad \text{oder}$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

falls der Limes existiert!

3. Sei $\int_a^b f(x)dx$ bei a und b uneigentlich, dann

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_c^{b-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^c f(x)dx.$$

mit $c \in (a,b)$, falls beide Grenzwerte existieren, ist der Wert unabhängig von der Wahl von $c \in (a,b)$.

4. Uneigentliches Integral existiert $\iff$ uneigentliches Integral konvergiert.

Lemma 6.39 (wie bei Reihen)**.** Absolute Konvergenz $\implies$ Einfache Konvergenz

Beispiel 6.40.

$$\int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \ln(b-a) - \ln(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \infty.$$

$$\int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\mu} = \frac{1}{1-\mu}\frac{1}{(x-a)^{\mu-1}}\bigg|_{a+\varepsilon}^b = \frac{1}{1-\mu}\left(\frac{1}{(b-a)^{\mu-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{\mu-1}}\right).$$

$\implies$ Integral ex. für $0 < \mu < 1$, ex. nicht für $\mu \geq 1$.

Satz 6.41 (Uneigentliche R.-Integrale Typ 2)**.** Sei $f\colon [a,\infty] \to \mathbb{R}$ eine lokal integrierbare Funktion, d.h. f ist auf $[a,b'] \subset [a,\infty)$ integrierbar $\forall b'$.

Falls für alle Folgen $b_n \in [a,+\infty)$ der Limes

$$\lim_{b_n\to\infty}\int_a^{b_n} f(x)dx =: \int_a^\infty f(x)dx.$$

existiert, dann ist dieser unabhängig von der Wahl der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und heißt uneigentliches Integral von f über $[a,\infty)$.

Lemma 6.42. Sei $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar und es existiere $\int_a^\infty |f(x)|dx$. Dann ex. $\int_a^\infty f(x)dx$ und es gilt

$$\left|\int_a^\infty f(x)dx\right| \leq \int_a^\infty |f(x)|dx.$$

Ende. □