Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	$\sum$
Punkte									

Aufgabe 1 (Vollständige Induktion)**.** (a) Beh.:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Beweis. durch vollständige Induktion

I.A.: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3.$$

I.S.: $n \to n+1$. Es existiere ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1) &= \frac{1}{6}(n^2+3n+2)(2n+3) \\
&= \frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n+6n^2+12n+6) \\
&= \frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)+n^2+2n+1 \\
&= \frac{1}{6}n(2n^3+3n+1)+(n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}n(n(2n+3)+1)+(n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2 \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k^2.
\end{aligned}$$

□

(b) Beh.:

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+2)^2 = \frac{1}{2}n\left(6n^2+21n+23\right).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(3k+2)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(9k^2+12k+4) \\
&= 9\sum_{k=1}^{n} k^2 + 12\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 4 \\
&\overset{\text{(a) und kl. Gauß}}{=} \frac{3}{2}n(n+1)(2n+1)+6n(n+1)+4n \\
&= \frac{1}{2}n\left(3(n+1)(2n+1)+12n+12+8\right) \\
&= \frac{1}{2}n\left(6n^2+21n+23\right).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2. (a) Beh.: $a_n := \sqrt[n]{nF^n}$. $\lim_{n\to\infty} a_n = F$

Beweis. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot F = F$ □

(b) Beh.: $b_n := \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)^k$, $\rho \in [2, 100]$. $\lim_{n\to\infty} b_n = \rho$

Beweis. Mit $q := \frac{\rho-1}{\rho}$ folgt $0 < q < 1 \; \forall \rho > 1$.
$\implies$

$$\lim_{n\to\infty} b_n \overset{\text{geometrische Reihe}}{=} \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{\rho-1}{\rho}} = \frac{1}{\frac{\rho-(\rho-1)}{\rho}} = \rho.$$

□

(c) Beh.: $c_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!}$. $\lim_{n\to\infty} c_n = e^S$

Beweis. Mit $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ folgt direkt $\lim_{n\to\infty} c_n = e^S$ □

(d) Beh.: $d_n := \frac{3-Fn^5}{\frac{n^5}{E}+n} \cdot \frac{R-GSTn}{\frac{U}{n}+Gn}$. $\lim_{n\to\infty} d_n = FEST$

Beweis.

$$d_n = \frac{3-Fn^5}{\frac{n^5}{E}+n} \cdot \frac{R-GSTn}{\frac{U}{n}+Gn} = \frac{\frac{3}{n^5}-F}{\frac{1}{E}+\frac{1}{n^4}} \cdot \frac{\frac{R}{n}-GST}{\frac{U}{n^2}+G}$$

$\implies$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \frac{F}{\frac{1}{E}} \cdot \frac{GST}{G} = FEST.$$

□

Aufgabe 3. (a) (1) $\sum_{k=0}^{\infty} k$ konvergiert nicht, da k keine Nullfolge. Die Folge der Partialsummen ist: $s_n = \sum_{k=0}^{n} k \overset{\text{kl. Gauß}}{=} \frac{n(n+1)}{2}$.

(2) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k} < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \; \forall k \in \mathbb{N}$ ist konvergent, da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergente Majorante. Die Folge der Partialsummen ist $s_n := \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m(m+1)}$.

(b) (i)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4\cdot 2^{k+1}}{3^k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4\cdot 2\cdot 2^k}{3^k} = 8\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 8\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k - \sum_{k=0}^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^k\right) = 8\left(3-\frac{5}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

(ii)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\sqrt{3^{k+1}}-\sqrt{3^k}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\sqrt{3^k}(\sqrt{3}-1)} &= \frac{1}{\sqrt{3}-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^k \\ &\overset{\text{Geometr. Reihe}}{=} \frac{1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

(c) (i) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ ist nicht absolut konvergent, da $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ divergiert.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k!} = e^2 - 1$ konvergiert absolut.

Aufgabe 4. (a) Sei $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine beschränkte und $u\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert durch $u(x) := x\cdot h(x)$.

Beh.: u im Punkt $x_0 = 0$ stetig.

Beweis. Da h beschränkt $\implies \exists C \in \mathbb{R}$, s.d. $|h(x)| \leq C\ \forall x \in \mathbb{R}$. Also gilt $|u(x)| \leq x \cdot C\ \forall x \in \mathbb{R}$. Damit folgt

$$0 \leq \lim_{x \nearrow 0} |u(x)| \leq \lim_{x \nearrow 0} x \cdot C = 0$$

und

$$0 \leq \lim_{x \searrow 0} |u(x)| \leq \lim_{x \searrow 0} x \cdot C = 0$$

$\implies$

$$\lim_{x \nearrow 0} u(x) = 0 = \lim_{x \searrow 0} u(x).$$

$\implies f$ stetig in x_0. □

(b) Beh.:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

ist unstetig auf ganz $\mathbb{R}$ aber $|f(x)|$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Beweis. $f(x)$ ist unstetig analog zur Dirichlet Funktion und $|f(x)| = 1$ ist offensichtlich stetig. □

(c) Beh.: Es gibt keine Funktion die im Punkt $x_0 = 0$ stetig und in allen anderen Punkten unstetig ist.

Beweis. Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 = 0$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Dann $\exists \delta > 0$, s.d. $\forall x \in \mathbb{R}$: $|x| < \delta$ $|f(x) - f(0)| < \frac{\epsilon}{2}$. Wähle $a := \frac{\delta}{2}$.
Zz.: f ist stetig in a.
Wähle $\delta' := \frac{\delta}{2}$. Sei $x' \in \mathbb{R}$ mit $|x' - a| < \frac{\delta}{2}$. Dann gilt $|f(0) - f(x')| < \frac{\epsilon}{2}$. Mit $|f(0) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2}$ folgt

$$\begin{aligned} |f(a) - f(x')| &= |f(a) - f(0) + f(0) - f(x')| \\ &\leq |f(a) - f(0)| + |f(0) - f(x')| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

$\implies f$ stetig in a. □

Aufgabe 5. (a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}^+$.

Beh (i) .:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \to \infty} a \implies \sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n \to \infty} a.$$

Beweis. Sei $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$. Damit gilt

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a = \limsup_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Mit Blatt 7 folgt damit:

$$a = \liminf_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a.$$

Also $\liminf_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = a = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$
$\implies \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$. □

Beh (ii) .:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \to \infty} \infty \implies \sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n \to \infty} \infty.$$

Beweis. Sei $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Dann existiert eine streng monoton wachsende, nach oben unbeschränkte Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Sei nun $q > 1$ beliebig. Dann $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall k > k_0 \colon \frac{a_{n_k}}{a_{n_{k-1}}} > q$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} a_{n_k} &> q \cdot a_{n_{k-1}} > q^2 \cdot a_{n_{k-2}} > \ldots > q^{k-k_0} a_{n_{k_0}} \\ \implies \sqrt[k]{a_{n_k}} &> q^{1-\frac{k_0}{k}} \sqrt[k]{a_{n_{k_0}}}. \end{aligned}$$

Für $k \to \infty$ folgt

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_{n_k}} > q.$$

Da $q > 1$ beliebig groß folgt damit

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty.$$

□

(b) (i) $a_n := \sqrt[n]{n!}$. Mit $\frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ folgt mit (a ii) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

(ii) $b_n := \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e.$$

Mit (a i) folgt direkt $\lim_{n\to\infty} b_n = e$.

(iii) $c_n := \frac{n^n}{n!} = \sqrt[n]{\left(\frac{n^n}{n!}\right)^n}$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n!}{n^n}\right)^n &= \frac{(n+1)^{(n+1)(n+1)}}{((n+1)!)^{n+1}} \cdot \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} \\ &= \frac{(n+1)^{n^2+2n+1}}{(n+1)!(n+1)^n} \cdot \frac{1}{n^{n^2}} \\ &= \frac{(n+1)^{n^2+n+1}}{(n+1)! \cdot n^{n^2}} \\ &> \frac{(n+1)^{n^2+n+1}}{(n+1)^n \cdot (n+1)^{n^2}} \\ &= \frac{(n+1)^{n^2+n+1}}{(n+1)^{n+n^2}} \\ &= n+1 \xrightarrow{n\to\infty} \infty. \end{aligned}$$

Mit (a ii) folgt damit $c_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

Aufgabe 6. Ergebnisse

Aufgabe	Beschränkt nach unten	Beschränkt nach oben	Monoton?	Konvergent?
(a)	Ja, durch $\frac{1}{2}$	Ja, durch 1	Ja, streng monoton wachsend	Ja, da monoton und beschränkt
(b)	Ja, durch 1	Ja, durch 2	Nein	Ja, nach Quotienten-kriterium für Folgen

Aufgabe 7. (a) (i) ist konvergent nach Leibniz Kriterium, da $\frac{1}{\ln(k)}$ monoton fallende Nullfolge.

(ii) ist divergent, da $(-1)^k \frac{(k+1)^k - k^k}{(k+1)^k}$ keine Nullfolge ist.

(iii) $\sum_{k=2}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k \cdot \ln^2(2^k)}$ ist konvergent und damit ist (iii) nach Verdichtungskriterium konvergent.

(b) Der Konvergenzradius ρ ist $\frac{1}{4}$, da Häufungspunkte von $\sqrt[k]{|a_k|}$ bei π und 4 vorliegen. Wegen $4 > \pi$ ist damit $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 4$.

Aufgabe 8. (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{5x+1} = \frac{2}{5}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 3} - 2x = -\frac{1}{2}$

(c) $\lim_{x\to\infty} 2^{-x} = 0$

(d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin(x)}{x} = 1$

(e) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{1}{2}$

(f) $\frac{x^2+x}{x^2-1} \to \infty$ für $x \searrow 1$.