

Aufgabe	A16	Σ
Punkte		

Aufgabe 16. Seien L und K Teilkörper mit $K \subseteq L$.

- a) (i) Beh.: Für $f, g \in K[t]$ gilt $\text{ggT}_{L[t]}(f, g) = \text{ggT}_{K[t]}(f, g)$.

Beweis. Seien $f, g \in K[t]$. Der euklid. Algorithmus in $K[t]$ liefert $a_2, \dots, a_k \in K[t]$ mit $a_k \in \text{GGT}_{K[t]}(f, g)$. Da K Teilkörper von L ist, ist $K[t]$ Unterring von $L[t]$. Das heißt, der euklid. Algorithmus kann in $L[t]$ mit den selben $a_2, \dots, a_k$ ausgeführt werden. Damit folgt $a_k \in \text{GGT}_{L[t]}(f, g)$.

Definiere $d \in K[t]$, als das normierte Polynom von a_k . Wegen der Eindeutigkeit des größten gemeinsamen Teilers in $L[t]$ und $K[t]$ folgt damit

$$\text{ggT}_{L[t]}(f, g) = d = \text{ggT}_{K[t]}(f, g).$$

□

- (ii) Beh.: Für $A, B \in M_{n,n}(K)$ so gilt

$$A \approx B \text{ in } M_{n,n}(K) \iff A \approx B \text{ in } M_{n,n}(L).$$

Beweis. Seien A, B in $M_{n,n}(K)$. „ $\implies$ “ ist trivial.

„ $\impliedby$ “: Sei $A \approx B$ in $M_{n,n}(L)$. Da $P_A \in M_{n,n}(K[t])$ folgt

$$\begin{aligned} d_{L[t]}(A) &= \text{ggT}_{L[t]}(\underbrace{\{\det(C) \mid C \text{ ist } l \times l \text{ Untermatrix von } P_A\}}_{\in K[t]}) \\ &\stackrel{(i)}{=} \text{ggT}_{K[t]}(\{\det(C) \mid C \text{ ist } l \times l \text{ Untermatrix von } P_A\}) \\ &= d_{K[t]}(A). \end{aligned}$$

Analog für B . Wegen $A \approx B$ in $M_{n,n}(L)$ gilt $\forall l = 1, \dots, n$:

$$d_{K[t]}(A) = d_{L[t]}(A) = d_{L[t]}(B) = d_{K[t]}(B).$$

Damit folgt $A \approx B$ in $M_{n,n}(K)$.

□

- b) Beh.: Für $A \in M_{n,n}(K)$ ist $A \approx A^T$.

Beweis. Es ist $\text{Fit}_l(P_A) = \text{Fit}_l((P_A)^T) \forall l = 1, \dots, n$. Also $P_A \sim (P_A)^T$. Wegen $(P_A)^T = (tE_n - A)^T = tE_n - A^T = P_{A^T}$ folgt $P_A \sim P_{A^T}$. Damit folgt mit dem Satz von Frobenius: $A \approx A^T$.

□