Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. a) Beh.: $\forall \epsilon > 0$ ex. $K \subseteq \Omega$ kompakt, s.d. $\mathscr{L}^1(\Omega \setminus K) < \epsilon$ und $f|_K$ stetig.

Beweis. Zunächst ist $f \in L^\infty(\Omega)$, also ist $\operatorname{ess\,sup}_\Omega |f| < \infty$. Damit folgt

$$\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1 \le \int_\Omega \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1 = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f| \cdot \mathscr{L}^1(\Omega) < \infty.$$

Also folgt $f \in L^1(\Omega)$. Dann ex. nach Hinweis eine Folge $f_k \in C^0(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ mit $f_k \to f$ in $L^1(\Omega)$. Nach 3.36 existiert dann eine Teilfolge $f_{k_j} \in C^0(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ mit $f_{k_j} \xrightarrow{j \to \infty} f$ f.ü..
Sei nun $\epsilon > 0$. Dann existiert nach Satz von Egorov ein $E_\epsilon \in \mathscr{B}(\Omega)$ mit $\mathscr{L}^1(E_\epsilon) \le \frac{\epsilon}{8}$ (i) und $f_{k_j} \rightrightarrows f$ in $\Omega \setminus E_\epsilon$.

Da $\mathscr{L}^1$ regulär ex. ein $\tilde{U} \supset E_\epsilon$ mit $\tilde{U}$ offen, s.d. $\mathscr{L}^1(\tilde{U}) < \mathscr{L}^1(E_\epsilon) + \frac{\epsilon}{8}$ (ii). Setze nun $U := \tilde{U} \cap \Omega$. Es ist U offen, da $\tilde{U}$ offen und Ω offen. Außerdem ist $E_\epsilon \subseteq U$, da $E_\epsilon \subseteq \Omega$ und $E_\epsilon \subseteq \tilde{U}$. Weiter ist $U \subseteq \tilde{U}$ und damit folgt mit Monotonie von $\mathscr{L}^1$:

$$\mathscr{L}^1(U) \le \mathscr{L}^1(\tilde{U}) \overset{\text{(ii)}}{<} \mathscr{L}^1(E_\epsilon) + \frac{\epsilon}{8} \overset{\text{(i)}}{\le} \frac{\epsilon}{8} + \frac{\epsilon}{8} = \frac{\epsilon}{4} \quad \text{(iii)}.$$

Weiter ex., da $\mathscr{L}^1$ regulär, ein $V \subseteq \Omega$ mit V abgeschlossen, s.d. $\mathscr{L}^1(V) > \mathscr{L}^1(\Omega) - \frac{\epsilon}{4}$ (iv).

Betrachte nun $\tilde{K} := U^c \cap V$. Da U offen, ist U^c abgeschlossen und da V abgeschlossen ist auch $\tilde{K}$ abgeschlossen. Damit ist $\forall x \in \tilde{K}$ folgt $x \notin U$. Da $E_\epsilon \subseteq U$ folgt $x \notin E_\epsilon$. Also ist $x \in \Omega \setminus E_\epsilon$. Es folgt also $\tilde{K} \subseteq \Omega \setminus E_\epsilon$ und damit $f_{k_j} \rightrightarrows f$ in $\tilde{K}$.

Es ist $\tilde{K} \subseteq V \subseteq \Omega$ und damit mit Monotonie $\mathscr{L}^1(\tilde{K}) \le \mathscr{L}^1(\Omega) < \infty$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^1(\Omega \setminus \tilde{K}) &= \mathscr{L}^1(\Omega) - \mathscr{L}^1(\tilde{K}) \\
&= \mathscr{L}^1(\Omega) - \mathscr{L}^1(V \setminus (U \cap V)) \\
&\overset{\text{(iv)}}{<} \mathscr{L}^1(\Omega) - \mathscr{L}^1(\Omega) + \frac{\epsilon}{4} + \mathscr{L}^1(U \cap V) \\
&\overset{\text{Monotonie}}{\le} \frac{\epsilon}{4} + \mathscr{L}^1(U) \\
&\overset{\text{(iii)}}{\le} \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} \\
&= \frac{\epsilon}{2} \quad \text{(v)}.
\end{aligned}$$

Betrachte nun $\tilde{K}_n := \tilde{K} \cap [-n, n]$. Dann ist $\tilde{K}_n \nearrow \tilde{K}$ und damit $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, s.d. $|\mathscr{L}^1(\tilde{K}) - \mathscr{L}^1(\tilde{K}_{n_0})| < \frac{\epsilon}{2}$. Setze $K := \tilde{K}_{n_0}$. Da $K \subseteq \tilde{K}$ folgt $\mathscr{L}^1(K) \le \mathscr{L}^1(\tilde{K})$ und damit insbesondere $\mathscr{L}^1(K) > \mathscr{L}^1(\tilde{K}) - \frac{\epsilon}{2}$ (vi). Dann gilt

$$\mathscr{L}^1(\Omega \setminus K) = \mathscr{L}^1(\Omega) - \mathscr{L}^1(K) \overset{\text{(vi)}}{<} \mathscr{L}^1(\Omega) - \mathscr{L}^1(\tilde{K}) + \frac{\epsilon}{2} = \mathscr{L}^1(\Omega \setminus \tilde{K}) + \frac{\epsilon}{2} \overset{\text{(v)}}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Es ist K beschränkt, da $K \subseteq [-n_0, n_0]$ und K abgeschlossen, da $\tilde{K}$ und $[-n_0, n_0]$ abgeschlossen. Also ist K kompakt. Außerdem ist $f_{k_j} \rightrightarrows f$ in $\tilde{K} \supseteq K$. Da $f_{k_j} \in C^0(\Omega)$ ist also $f|_K$ stetig. □

b) Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann sei $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$. Dann betrachte

$$U := \bigcup_{i \in I} \left(q_i - \frac{\epsilon}{2^{i+2}}, q_i + \frac{\epsilon}{2^{i+2}} \right).$$

Dann ist U offen als Vereinigung offener Mengen und U^c abgeschlossen. Setze nun $K := U^c \cap \left[\frac{\epsilon}{4}, 1 - \frac{\epsilon}{4}\right] \subseteq (0, 1)$. Dann ist K abgeschlossen als Schnitt abgeschlossener Mengen. Da $\left[\frac{\epsilon}{4}, 1 - \frac{\epsilon}{4}\right]$ beschränkt, ist auch K beschränkt. Also K abgeschlossen und beschränkt, damit kompakt.

Weiter ist $\mathbb{Q} \subseteq U$, d.h. $\mathbb{Q} \cap K \subseteq \mathbb{Q} \cap U^c = \emptyset$. Das heißt $\forall x \in K\colon f(x) = 0$. Also insbesondere $f|_K \equiv 0$ und damit stetig.

Außerdem folgt, da $\mathscr{L}^1((0,1)) = 1$, insbesondere endlich:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^1((0,1) \setminus K) &= 1 - \mathscr{L}^1(K) \\
&= 1 - \mathscr{L}^1\left(U^c \cap \left[\frac{\epsilon}{4}, 1 - \frac{\epsilon}{4}\right]\right) \\
&= 1 - \mathscr{L}^1\left(\left[\frac{\epsilon}{4}, 1 - \frac{\epsilon}{4}\right] \setminus \left(U \cap \left[\frac{\epsilon}{4}, 1 - \frac{\epsilon}{4}\right]\right)\right) \\
&\overset{\text{Monotonie}}{\leq} 1 - \mathscr{L}^1\left(\left[\frac{\epsilon}{4}, 1 - \frac{\epsilon}{4}\right]\right) + \mathscr{L}^1(U) \\
&\overset{\text{Subadd}}{\leq} \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\epsilon}{2^{i+1}} \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Also liegt kein Widerspruch zu (a) vor.

Aufgabe 2. a) Definiere $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Beh.: $f_k \to f$ punktweise.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Zunächst gilt $\forall k \in \mathbb{N}\colon I_k \subseteq (0, \infty)$.

Falls $x \leq 0$ ist $f_k(x) = 0$, da $\forall k \in \mathbb{N}\colon x \notin I_k$. Falls nun $x > 0$. Dann ex. ein $n \in \mathbb{N}$, s.d. $2^{-n} < x$. Dann gilt $\forall k \geq n\colon\ 2^{-k} \leq 2^{-n}$ und damit $I_k \subseteq (0, 2^{-k}] \subseteq (0, 2^{-n}]$. Da $x > 2^{-n}$ folgt also $x \notin I_k$ und damit $f_k(x) = 0$, also insbesondere $|f_k(x) - f(x)| = |f_k(x)| = 0 < \epsilon$. □

Beh.: f_k konvergiert nicht gleichmäßig.

Beweis. Setze $\epsilon := \frac{\sqrt{2}}{2}$. Sei nun $k \in \mathbb{N}$. Dann setze $x := 2^{-k}$. Dann ist $x \in I_k$ und damit

$$f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{-k}}} \geq \frac{1}{\sqrt{2^{-1}}} = \sqrt{2} > \epsilon.$$

□

Beh.: $f_k \to f$ im Maß.

Beweis. Es ist $\forall x \in [0,1]^c\colon f_k(x) = 0$, denn $\forall k \in \mathbb{N}\colon I_k \subseteq [0, 2^{-k}] \subseteq [0, 2^{-1}] \subseteq [0,1]$. Das heißt $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]\colon |f_k(x) - f(x)| = 0$.

D.h. es genügt f_k auf $X := [0,1]$ zu betrachten. Dann gilt jedoch $\mathscr{L}^1(X) = 1 < \infty$ und damit mit 3.35, da $f_k \to f$ punktweise, konvergiert $f_k \to f$ im Maß auf X. Insgesamt folgt also die Behauptung. □

b) Beh.: Für $1 \leq p < \infty$ gilt: f_k konvergiert in $L^p(\mathbb{R}) \iff p < 2$.

Beweis. Zunächst ist für $k \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{\sqrt{x}}$ stetig und damit auf I_k f_k stetig und damit R.-integrierbar, also auch Lebesgue-integrabel und die Werte stimmen überein. Es kann also auf I_k der HDI angewandt werden. Da weiter χ_{I_k} messbar, ist f_k als Produkt messbarer Funktionen messbar.

Sei $1 \leq p < \infty$ beliebig.

- Falls $p = 2$: Dann sei $k \in \mathbb{N}$ bel. Mit der Vorüberlegung folgt direkt

$$\|f_k - f\|_2^2 = \int_{I_k} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \log(|x|)\Big|_{2^{-(k+1)}}^{2^{-k}} = -k\log(2) + (k+1)\log(2) = \log(2) \xrightarrow{k \to \infty} \log(2).$$

  Also f_k konvergiert nicht in $L^2(\mathbb{R})$.

- Falls $p \neq 2$: Dann sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt mit $\mu := \frac{2}{2-p}\left(1 - 2^{-\frac{2-p}{2}}\right)$:

$$\|f_k\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f_k|^p \,\mathrm{d}x = \int_{I_k} x^{-\frac{p}{2}} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{2-p} 2^{-k\frac{2-p}{2}} \left(1 - 2^{-\frac{2-p}{2}}\right) = \mu 2^{-k\frac{2-p}{2}}.$$

  Falls $p < 2$ ist $\frac{2-p}{2} > 0$ und damit $\|f_k\|_p^p = \mu 2^{-k\frac{2-p}{2}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Also konvergiert f_k in $L^p(\mathbb{R})$ für $p < 2$.

  Falls $p > 2$, dann ist $\frac{2-p}{2} < 0$ und damit $-k\frac{2-p}{2} \xrightarrow{k\to\infty} \infty$, also $\|f_k\|_p^p = \mu 2^{-k\frac{2-p}{2}} \xrightarrow{k\to\infty} \infty$. Also konvergiert f_k in $L^p(\mathbb{R})$ für $p > 2$ nicht.

□

Aufgabe 3. a) Beh.: $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) = \mathscr{B}(\mathbb{R})^n$.

Beweis.
- „$\subseteq$": Betrachte $\mathscr{O} := \{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \text{ offen}\}$. Dann ist $\sigma(\mathscr{O}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Betrachte weiter $\mathscr{R} := \{\times_{i=1}^n (a_i, b_i) \mid a_i, b_i \in \mathbb{Q}\}$. Dann ist $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{B}(\mathbb{R})^n$, denn $\forall a, b \in \mathbb{Q}$ ist (a, b) offen und damit $(a, b) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.
  Sei $\Omega \in \mathscr{O}$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, ex. $R_i \in \mathscr{R}$, s.d. $\Omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} R_i$. Damit folgt $\Omega \in \sigma(\mathscr{R})$ und damit $\mathscr{O} \subseteq \sigma(\mathscr{R}) \subseteq \mathscr{B}(\mathbb{R})^n$. Da $\sigma(\mathscr{O}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, folgt $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{B}(\mathbb{R})^n$.
- „$\supseteq$": Dazu betrachte $\mathscr{K} = \{\times_{i=1}^n A_i \mid A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$. Dann ist nach Definition der Produktalgebra $\sigma(\mathscr{K}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})^n$.
  Betrachte nun $\pi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \mapsto x_i$. π_i ist stetig und damit insbesondere $(\mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-messbar. Seien nun $A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist

$$\bigtimes_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n (\mathbb{R}^{i-1} \times A_i \times \mathbb{R}^{n-i}) = \bigcap_{i=1}^n \underbrace{\pi_i^{-1}(A_i)}_{\in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n).$$

  Also ist $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und damit $\mathscr{B}(\mathbb{R})^n = \sigma(\mathscr{K}) \subseteq \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

□

b) Beh.: $N \times \Omega \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Es ist $N \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ und $\Omega \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{n-1})$. Dann gilt nach Definition

$$N \times \Omega \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}^{n-1}) \overset{\text{(a)}}{=} \mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R})^{n-1} = \mathscr{B}(\mathbb{R})^n \overset{\text{(a)}}{=} \mathscr{B}(\mathbb{R}^n).$$

□

Beh.: $\mathscr{L}^n(N \times \Omega) = 0$.

Beweis. Es ist nach Definition $\mathscr{L}^n = (\mathscr{L}^1)^n = \mathscr{L}^1 \times (\mathscr{L}^1)^{n-1}$. Es ist $\mathscr{L}^n$ das Produktmaß von $\mathscr{L}^1$ und $(\mathscr{L}^1)^{n-1}$. auf den σ-endlichen Maßräumen $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathscr{L}^1)$ und $(\mathbb{R}^{n-1}, \mathscr{B}(\mathbb{R}^{n-1}), (\mathscr{L}^1)^{n-1})$. Damit gilt nach 4.5 und unserer Konvention $0 \cdot \infty = 0$:

$$\mathscr{L}^n(N \times \Omega) = \mathscr{L}^1(N)(\mathscr{L}^1)^{n-1}(\Omega) = 0.$$

□

c) Beh.: Für $n \geq 2$ ist $(\mathscr{L}_1)^n \subsetneq \mathscr{L}_n$.

Beweis. Sei $V \subseteq [0, 1]$ eine nicht lebesgue messbare Menge (solch eine Menge existiert nach Vitali). Dann definiere $A := V \times \{0\}^{n-1}$ und $B := \mathbb{R} \times \{0\}^{n-1}$. Dann ist $A \subseteq B$ und es ist, da $\mathscr{L}^n = (\mathscr{L}_1)^n$, der Konvention $\mathscr{L}^0(\{0\}^0) = 1$ und erneut $0 \cdot \infty = 0$:

$$\mathscr{L}^n(B) = \mathscr{L}^1(\mathbb{R}) \underbrace{\mathscr{L}^1(\{0\})}_{=0} \mathscr{L}^{n-2}(\{0\}^{n-2}) = 0.$$

Da $A \subseteq B$ und B $\mathscr{L}^n$-Nullmenge und $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}_n, \mathscr{L}^n)$ vollständiger Maßraum folgt $A \in \mathscr{L}_n$.

Ang.: $A \in (\mathscr{L}_1)^n$. Dann ist $A \in \mathscr{L}_1 \times (\mathscr{L}_1)^{n-1}$. Mit $y = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$ folgt, da $(\mathbb{R}, \mathscr{L}_1, \mathscr{L}^1)$ und $(\mathbb{R}^{n-1}, (\mathscr{L}_1)^{n-1}, (\mathscr{L}^1)^{n-1})$ σ-endliche Maßräume:

$$\mathscr{L}_1 \ni A^y = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, 0, \ldots, 0) \in A\} = V.$$

Also $V \in \mathscr{L}_1$ $\lightning$.

□

Aufgabe 4. a) Beh.: Die Aussage ist falsch.

Beweis. Betrachte $f_k := \chi_{[k,k+1]}$. Dann ist $f_k \to f \equiv 0$ punktweise f.ü. und $f_k, f \in L^1(\mathbb{R})$, aber es gilt $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}} f_k \, \mathrm{d}x = \int_{[k,k+1]} \, \mathrm{d}x = \mathscr{L}^1([k,k+1]) = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}x \, .$$

□

b) Beh.: Die Aussage ist falsch.

Beweis. Betrachte $f_k := \chi_{[k,\infty)} \geq 0$. Dann ist $f_k \searrow f \equiv 0$ punktweise f.ü. und $f \equiv 0 \in L^1(\mathbb{R})$, aber $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R}} f_k \, \mathrm{d}x = \int_{[k,\infty)} \, \mathrm{d}x = \infty \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}x \, .$$

□

c) Beh.: Die Aussage stimmt.

Beweis. Da $f_k \searrow f$ punktweise f.ü. gilt $f_k \leq f_1$ $\forall k \in \mathbb{N}$ und wegen $f_1 \in L^1$ und $f_1 \geq 0$ ist $|f_1| = f_1$ integrabel, also folgt mit dominierter Konvergenz, dass f integrabel und

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}x \, .$$

Da $f_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ folgt $f \geq 0$. Da f integrabel also auch $|f| = f$ integrabel und damit $f \in L^1(\mathbb{R})$. □

d) Beh.: Die Aussage stimmt nicht.

Beweis. Definiere

$$J_{kj} = [j2^{-k}, (j+1)2^{-k}]$$

für $k \in \mathbb{N}_0$ und $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j + 1 \leq 2^k$.

Betrachte $a_n := \lfloor \log_2(n) \rfloor$ und $b_n := n \bmod 2^{a_n}$. Damit definiere

$$I_n := J_{a_n b_n}$$

und setze $f_k := \chi_{I_k}$. Es ist $f_k \to f \equiv 0$ in $L^1(\mathbb{R})$, denn $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} |f_k - 0| \, \mathrm{d}x = \int_{I_k} \, \mathrm{d}x = \mathscr{L}^1(I_k) = 2^{-a_k} = 2^{-\lfloor \log_2(k) \rfloor} \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

da $\log_2(k)$, insbesondere $\lfloor \log_2(k) \rfloor$, monoton wachsend und unbeschränkt.

Aber setze nun $\epsilon := \frac{1}{2}$. Dann sei $x \in [0,1]$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann setze $n := 2^{a_k+1} = 2^{\lfloor \log_2(k) \rfloor + 1}$. Dann gilt $n \geq k$. Da $x \in [0,1]$ ex. insbesondere ein $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j + 1 \leq 2^n$, s.d. $x \in J_{nj}$. Dann setze $n_0 := n + j$. Dann ist $a_{n_0} = a_n$, da $j < 2^n$ und $b_{n_0} = n_0 \bmod 2^{a_n} = j$. Also $I_{n_0} = J_{nj}$. Und damit $x \in I_{n_0}$. Außerdem ist $n_0 \geq k$. Damit folgt dann

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| = |f_{n_0}(x)| = \chi_{I_{n_0}}(x) = 1 > \frac{1}{2} = \epsilon.$$

Also konvergiert f_k für kein $x \in [0,1]$ punktweise gegen $f \equiv 0$ und da $\mathscr{L}^1([0,1]) > 0$ konvergiert f_k nicht f.ü. punktweise. □