

Aufgabe	A1	A2	A3	Σ
Punkte				

Aufgabe 1. Es ist $F := \frac{1}{1+x^2} \in L^1((0,1))$, da F auf dem beschränkten Intervall $(0,1)$ beschränkt. Dann gilt mit dem Diffeomorphismus $t: (0, \frac{\pi}{4}) \rightarrow (0,1)$ mit $t(x) := \tan(x)$ für $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ und $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ mit dem Transformationssatz:

$$\int_{(0,1)} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4} \quad (*).$$

Es ist g stetig in beiden Koordinaten, insbesondere messbar und R-integrierbar mit Hauptsatz. Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy &= - \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \\ &= - \int_{(0,1)} \frac{1}{1+y^2} dy \\ &\stackrel{(*)}{=} -\frac{\pi}{4} \\ &\neq \frac{\pi}{4} \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{(0,1)} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} dy dx \\ &= \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy dx. \end{aligned}$$

Die beiden Integrale stimmen nicht überein, da $g(x,y) \notin L^1((0,1) \times (0,1))$, denn

$$\begin{aligned} \int_{(0,1) \times (0,1)} |g(x,y)| dx dy &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \\ &= \int_{(0,1)} \left[- \int_{(0,y]} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx + \int_{(y,1)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right] dy \\ &= \int_{(0,1)} \left[\frac{y}{2y^2} - \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{y}{2y^2} \right) \right] dy \\ &= \int_{(0,1)} \frac{1}{y} dy - \int_{(0,1)} \frac{1}{1+y^2} dy \\ &\stackrel{\text{mon. Konv.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[\frac{1}{n}, 1)} \frac{1}{y} dy - \frac{\pi}{4} \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1}{n} \right) - \frac{\pi}{4} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. a) Es ist $(\sqrt{r^2 - 1})(1, \infty) = (0, \infty)$, $(rt \sin(s))(U) = \mathbb{R}$ und $(rt \cos(s))(U) = \mathbb{R}$. $\sin$ und $\cos$ haben keine gemeinsamen Nullstellen und $r, t \neq 0$ für $(r, t, s) \in U$, also folgt

$$\Phi(U) = \{x \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \mid x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0\}.$$

Durch Rechnung folgt

$$D\Phi = \begin{pmatrix} t \cos(s) & -rt \sin(s) & r \cos(s) \\ t \sin(s) & rt \cos(s) & r \sin(s) \\ \frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(D\Phi) = -\frac{r^3 t}{\sqrt{r^2 - 1}}.$$

b) Es ist $D\Phi$ auf ganz U definiert und stetig, also $\Phi \in C^1(U)$. Betrachte $\Psi: \Phi(U) \rightarrow U$ mit

$$\Psi(u, v, w) = \begin{pmatrix} \sqrt{w^2 + 1} \\ \arccos\left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right) \\ \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{w^2 + 1}} \end{pmatrix}.$$

Kurze Rechnung ergibt $\Psi \circ \Phi = \text{id}$ und $\Phi \circ \Psi = \text{id}$. Also folgt Φ bijektiv und $\Phi^{-1} = \Psi$. Es ist außerdem Φ^{-1} stetig partiell differenzierbar, als Verkettung stetig partiell differenzierbarer Funktionen. Also $\Phi^{-1} \in C^1(\Phi(U))$. Insgesamt folgt, dass Φ ein C^1 -Diffeomorphismus ist.

c) Es ist

$$\begin{aligned} H &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_3 \in [0, 2], \frac{1}{2}(1 + x_3^2) \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 2(1 + x_3^2) \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : (r, t, s) := \Phi^{-1}(x), \sqrt{r^2 - 1} \in [0, 1], \frac{1}{2}r^2 \leq r^2 t^2 \leq 2r^2 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : (r, t, s) := \Phi^{-1}(x), r \in [1, \sqrt{5}], \frac{1}{2} \leq t^2 \leq 2 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : (r, t, s) := \Phi^{-1}(x), r \in [1, \sqrt{5}], t \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} \right] \right\} \end{aligned}$$

Damit folgt jetzt direkt

$$\Phi^{-1}(H) = \left\{ (r, t, s) \in U : r \in [1, \sqrt{5}], t \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} \right] \right\}.$$

d) Zunächst gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(s) \, ds = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(s) \, ds.$$

Damit folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(s) \, ds = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2(s) + \sin^2(s)) \, ds = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} ds = \pi \quad (*).$$

Es ist H beschränkt, also $\mathcal{L}^3(H) < \infty$ und mit $F(x) := x_1^2 x_3$ ist $|F|$ beschränkt auf H , also $F \in L^1(H)$. Also folgt mit den Ergebnissen aus a) bis c) und dem Transformationssatz

$$\begin{aligned} \int_H x_1^2 x_3 \, dx &= \int_{\Phi(\Phi^{-1}(H))} F \, dx \\ &\stackrel{\text{Trafo}}{=} \int_{\Phi^{-1}(H)} (F \circ \Phi) |\det(D\Phi)| \, dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_1^{\sqrt{5}} dr \int_{-\pi}^{\pi} ds \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} dt \frac{r^5 t^3 \cos^2(s) \sqrt{r^2 - 1}}{\sqrt{r^2 - 1}} \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{155}{8} \pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Definiere $h(x, y) := f(x)g(y)$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$. Es ist h messbar, da f und g messbar. Also gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2n}} |h(x, y)| \, d(x, y) &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |h(x, y)| \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |g(y)| \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \, dy \\ &\stackrel{f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)}{<} \infty. \end{aligned}$$

Also folgt $h \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$. Außerdem gilt für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x, y)| \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |g(y)| \, dy = |f(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \, dy < \infty.$$

Also mit $g_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto h(x, y)$ ist auch $g_x \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Damit folgt nun

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \, dx \right) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \, dy \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y) \, dy \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h(x, y) \, dy \right) \, dx \\ &\stackrel{\text{Trafo}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h(x, y - x) \, dy \right) \, dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h(x, y - x) \, dx \right) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y - x) \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(y) \, dy. \end{aligned}$$