

Aufgabe 1. Zwangsbedingung ist $f(a, b, c) = abc - V \stackrel{!}{=} 0$

Notwendige Bedingung für Minimum:

$$\vec{\nabla}(E + \lambda f) \cdot \delta \vec{x} = 0.$$

Mit

$$E(a, b, c) = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$

folgt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} E &= -\frac{h^2}{4m} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^3} \\ \frac{1}{b^3} \\ \frac{1}{c^3} \end{pmatrix} \\ \vec{\nabla} f &= \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit folgt mit $V = abc$

$$-\frac{h^2}{4m} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^3} \\ \frac{1}{b^3} \\ \frac{1}{c^3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} = 0 \implies -\frac{h^2}{4ma^3} + \lambda \frac{V}{a} = 0 \implies \lambda = \frac{h^2}{4Vma^2} \implies \begin{cases} b^2 = a^2 \\ c^2 = a^2 \end{cases}.$$

Mit $a, b, c > 0$ und $V = abc$ folgt $a = b = c = \sqrt[3]{V}$.

Überprüfung ob ein Minimum vorliegt:

$$HE(a, b, c) = \frac{h^2}{4m} \begin{pmatrix} \frac{3}{a^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{b^4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{c^4} \end{pmatrix}.$$

$HE(a, b, c)$ nach Hauptminorenkriterium positiv definit, damit liegt bei $a = b = c = \sqrt[3]{V}$ ein Minimum vor.

Aufgabe 2. (a) Für die Zwangsbedingung gilt

$$\tan \alpha = \frac{z}{x - \xi(t)} \implies x \sin \alpha - \xi(t) \sin \alpha - z \cos \alpha = 0. \quad (*)$$

(b) Damit folgen die Langrange-Gleichungen 1. Art:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} - m\ddot{\vec{x}} + \lambda \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{cases} -m\ddot{x} + \lambda \sin \alpha = 0 \implies \lambda = \frac{m}{\sin \alpha} \ddot{x} \\ m\ddot{y} = 0 \xrightarrow{\vec{x}(0)=\dot{\vec{x}}(0)=0} y = 0 \\ mg + m\ddot{z} + \cos \alpha = 0 \end{cases}.$$

Mit (*) folgt

$$x = \xi + z \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \implies \ddot{x} = \ddot{\xi} + \ddot{z} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Damit folgt für z :

$$\begin{aligned} g + \ddot{z} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \left(\ddot{\xi} + \ddot{z} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) &= 0 \\ \implies \ddot{z} &= -g \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha \ddot{\xi} \end{aligned}$$

Mit $\vec{x}(0) = 0$, $\dot{\vec{x}}(0) = 0$, $\xi(0) = 0$ und $\dot{\xi}(0) = 0$ folgt

$$z = -\frac{1}{2} g \sin^2 \alpha \cdot t^2 - \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \xi$$

Eingesetzt in (*) folgt für x

$$x = \sin^2 \alpha \cdot \xi - \frac{1}{4} g \sin(2\alpha) t^2$$

Damit folgt insgesamt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \sin^2 \alpha \cdot \xi - \frac{1}{4} g \sin(2\alpha) t^2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} g \sin^2 \alpha \cdot t^2 - \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \xi \end{pmatrix}.$$

(c) Die Zwangskraft ist gegeben durch

$$\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} f = \lambda \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

Mit $\lambda = \frac{m}{\sin \alpha} \ddot{x}$ folgt direkt

$$\vec{Z} = \begin{pmatrix} m\ddot{x} \sin^2 \alpha - \frac{1}{2}mg \sin(2\alpha) \\ 0 \\ -\frac{m}{2}\ddot{x} \sin(2\alpha) + mg \cos^2 \alpha \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. (a) Es liege ein Potential mit $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{x})$ vor. Damit gilt Energieerhaltung und es folgt

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + V(\vec{x}) &= E \\ \Rightarrow \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| &= \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\vec{x}))} \end{aligned}$$

Durch Trennung der Variablen folgt

$$dt = \frac{|\mathrm{d}\vec{x}|}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\vec{x}))}} \Rightarrow \Delta t = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_E} \frac{|\mathrm{d}\vec{x}|}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\vec{x}))}}$$

Mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ -f(x) \end{pmatrix}$ folgt

$$\frac{d\vec{x}}{dx} = \begin{pmatrix} 1 \\ -f'(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \frac{d\vec{x}}{dx} \right| = \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

Zusammen folgt

$$\Delta t = \int_{x_0}^{x_E} \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\vec{x}))}} dx.$$

(b) Mit $E = 0$, $x_0 = 0$, $x_E = 1$ und $f(x) = x$ folgt

$$\Delta t = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2g}} dx = \frac{2}{\sqrt{g}} \sqrt{x} \Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{g}}.$$