Aufgabe	A12	A13	A14	A15	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 12. (a) Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent

(i) $\overline{m}$ ist eine Einheit in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

(ii) $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Sei $\overline{m} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Dann existiert ein $l \in \mathbb{Z}$ mit $\overline{m} \cdot \overline{l} = \overline{1}$. Also ist $ml - 1 \in n\mathbb{Z}$ und es ex. $k \in \mathbb{Z}$ mit $ml - 1 = kn \implies 1 = ml - kn$. Sei nun $d \in \mathbb{Z}$ mit $d \mid m$ und $d \mid n$. Dann folgt $d \mid (ml - kn) = 1$. Wegen $d \in \mathbb{Z}$, folgt $d = \pm 1$. Damit ist $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$.

(ii) $\implies$ (i): Sei $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$. Dann folgt mit dem Erw. Euklid. Alg.: $\exists u, v \in \mathbb{Z}$ mit $um + vn = 1 \implies \overline{um} + \underbrace{\overline{vn}}_{=\overline{0}} = 1 \implies \overline{u} \cdot \overline{m} = 1 \implies \overline{m} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. □

(b) Es ist mit Euklidischem Algorithmus

$$\begin{aligned} 51 &= 1 \cdot 42 + 9 \\ 42 &= 4 \cdot 9 + 6 \\ 9 &= 1 \cdot 6 + 3 \\ 6 &= 2 \cdot 3 \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{ggT}(51, 42) = 3 \implies \overline{42} \notin (\mathbb{Z}/51\mathbb{Z})^\times$.

$$\begin{aligned} 55 &= 1 \cdot 42 + 13 \\ 42 &= 3 \cdot 13 + 3 \\ 13 &= 4 \cdot 3 + 1 \\ 3 &= 3 \cdot 1 \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{ggT}(55, 42) = 1 \implies \overline{42} \in (\mathbb{Z}/55\mathbb{Z})^\times$. Der EEA liefert:

$$\begin{aligned} 1 &= 13 - 4 \cdot 3 \\ &= 13 - 4(42 - 3 \cdot 13) \\ &= 13 \cdot 13 - 4 \cdot 42 \\ &= 13(55 - 42) - 4 \cdot 42 \\ &= 13 \cdot 55 + (-17) \cdot 42. \end{aligned}$$

Es ist $-17 + 55 = 38$, also folgt $\overline{42} \cdot \overline{38} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}/55\mathbb{Z}$.

Aufgabe 13. (a) Beh.: $\forall z \in \mathbb{C}$ ex. $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ mit $\delta|z - (a+bi)| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Beweis. Mit $\mathrm{rd}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

$$\mathrm{rd}(x) = \begin{cases} \lceil x \rceil & |x - \lceil x \rceil| \le |x - \lfloor x \rfloor| \\ \lfloor x \rfloor & \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit folgt $\forall x \in \mathbb{R}\ |x - \mathrm{rd}(x)| \le \frac{1}{2}$.
Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $c, d \in \mathbb{R}$ und $z = c + di$. Dann wähle $a := \mathrm{rd}(c)$ und $b := \mathrm{rd}(d)$. Damit folgt

$$0 \le (\underbrace{c - a}_{\le \frac{1}{2}})^2 + (\underbrace{d - b}_{\le \frac{1}{2}})^2 \le \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Da beide Seiten nicht negativ, folgt

$$|z - (a + bi)| = |c + di - (a + bi)| = |(c-a)^2 + (d-b)^2| \le \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

□

(b) Beh.: $\delta(xy) = \delta(x) \cdot \delta(y) \ \forall x, y \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Durch Einsetzen der Definition und Nachrechnen, analog zum letzten Zettel. $\square$

Beh.: $\forall z, w \in \mathbb{Z}[i]$ mit $w \neq 0$ ex. $q \in \mathbb{Z}[i]$ mit $\delta(z - q \cdot w) \leq \frac{1}{2}\delta(w)$.

Beweis. Seien $z, w \in \mathbb{Z}[i]$ mit $w \neq 0$. Dann ex. mit (a) ein $q \in \mathbb{Z}[i]$, s.d.

$$\delta\left(\frac{z}{w} - q\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Damit folgt direkt

$$\delta(w)\delta\left(\frac{z}{w} - q\right) = \delta\left(w\left(\frac{z}{w} - q\right)\right) = \delta(z - qw) \leq \frac{1}{2}\delta(w).$$

$\square$

(c) Beh.: $\mathbb{Z}[i]$ ist Euklidischer Ring.

Beweis. Zunächst ist $\mathbb{Z}[i]$ nullteilerfrei. Weiter seien $f, g \in \mathbb{Z}[i]$ mit $g \neq 0$. Dann ex. mit (b) ein $q \in \mathbb{Z}[i]$ mit

$$\delta(f - q \cdot g) \leq \frac{1}{2}\delta(g).$$

Mit $r := f - q \cdot g$ folgt damit $\delta(r) \leq \frac{1}{2}\delta(g)$, also wegen $g \neq 0$ und $\delta(r), \delta(g) \in \mathbb{N}_0$, $\delta(r) < \delta(g)$. Damit folgt

$$f = qg + r \qquad (\delta(r) < \delta(g) \text{ oder } r = 0).$$

$\square$

(d) Beh.: $1 \in \mathrm{GGT}(9, 3 + 4i)$.

Beweis. Mit dem Euklid. Alg. folgt:

$$\begin{aligned} 9 &= (1 - i)(3 + 4i) + (2 - i) \\ 3 + 4i &= 2i \cdot (2 - i) + 1 \\ 2 - i &= (2 - i) \cdot 1. \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 14. Beh.: Sei $R \neq 0$ ein Ring, dann sind äquivalent:

(i) R ist ein Körper

(ii) $R[t]$ ist ein Euklidischer Ring

(iii) $R[t]$ ist ein Hauptidealring

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Polynomringe über Körper sind nach VL euklidisch.

(ii) $\implies$ (iii): Jeder Euklidische Ring ist nach VL Hauptidealring.

(iii) $\implies$ (i): Sei R kein Körper. Falls R nicht nullteilerfrei, folgt die Behauptung. Sei im Folgenden also R nullteilerfrei. Wegen $R \neq 0$ existiert ein $x \in R \setminus \{0\}$ mit $xy \neq 1 \ \forall y \in R$.

Beh.: (x, t) ist kein Hauptideal. Ang.: $\exists f \in R[t]$ mit $(f) = (x, t)$. Dann ex. $h \in R[t]$ mit $x = fh$. Da R nullteilerfrei, folgt

$$0 = \deg(x) = \deg(f) + \deg(h) \implies \deg(f) = \deg(h) = 0.$$

Es ex. also ein $a \in R$ mit $f = a$. Außerdem ex. $g \in R[t]$ mit $t = fg = ag$. Also ist $\deg(g) = 1$ und wegen $e(t) = 1$ folgt

$$1 = e(t) = e(a) \cdot e(g) = a \cdot \underbrace{e(h)}_{\in R}.$$

Also ist $a \in \mathbb{R}^\times$ und damit $1 \in (a) = (x,t)$, denn $1 = aa^{-1}$. Wegen $(a) = (x,t)$, existieren $u, v \in R[t]$ mit

$$1 = xu + tv \overset{t=0}{\Longrightarrow} 1 = x \cdot \underbrace{u(0)}_{\in R}.$$

Damit ist $x \in R^\times$ ↯. $\square$

Aufgabe 15. (a) Rechnerei ergibt

$$\begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 10 & 12 & 6 \\ 20 & 12 & 10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 6 & 12 & 10 \\ 0 & 20 & 0 \\ 10 & 12 & 20 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & -8 & 10 \\ 0 & 20 & 0 \\ 6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & -24 & 10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -50 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -50 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

Damit folgen mit dem Elementarteilersatz die Elementarteiler $2, 2$ und 100. Also folgen die Fittingideale mit $\mathrm{Fit}_1(A) = (2)$, $\mathrm{Fit}_2(A) = (2 \cdot 2) = (4)$ und $\mathrm{Fit}_3(A) = (2 \cdot 2 \cdot 100) = (400)$.

(b) Noch mehr Rechnerei ergibt

$$\begin{pmatrix} 1-t & -1 & 2 \\ -1 & -t & 3 \\ 0 & -1 & 3-t \end{pmatrix} \ \Big| \cdot (-1) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & t & -3 \\ 1-t & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3-t \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-t+t^2 & 5-3t \\ 0 & -1 & 3-t \end{pmatrix} \ \Big| \cdot (-1) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3+t \\ 0 & -1-t+t^2 & 5-3t \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-5t+4t^2-t^3 \end{pmatrix}.$$

Damit folgen die Elementarteiler 1, 1 und $2-5t+4t^2-t^3$. Für die Fittingideale gilt $\mathrm{Fit}_1(B) = (1)$, $\mathrm{Fit}_2(B) = (1)$ und $\mathrm{Fit}_3(B) = (2-5t+4t^2-t^3)$.