Heute: Längstes deutsches Wort!

„Intervallschachtelungseigenschaft hat ganze 33 Buchstaben" meint Kostina.

Fortsetzung des Beweises vom letzten Mal. Ab jetzt: n statt k.

Zu zeigen: Es existiert eine Wurzel für $0 < a < 1$.

Definiere Menge $M := \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < 1, y^n < a\}$
$M \neq \emptyset$, weil $\frac{1}{2}a \in M$. M ist auch beschränkt, untere Schranke 0, obere Schranke 1.

Da $\mathbb{R}$ vollständig $\implies \exists \sup M =: x$.

Zu zeigen: $x^n = a$ Annahme: $x^n < a$. Wegen $(x+1) \notin M$ gilt $(x+1)^n > a$. Konstruiere:

$$\tau := \frac{\overbrace{a - x^n}^{>1}}{(x+1)^n - x^n}.$$

$$\begin{aligned}
(x+\tau)^n &= x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \tau^k x^{n-k} \\
&< x^n + \tau \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \\
&= x^n + \tau((x+1)^n - x^n) \\
&\overset{\text{Def. } \tau}{=} x^n + (a - x^n) = a.
\end{aligned}$$

$\implies$

$$(x+\tau)^n < a \implies (x+\tau) \in M.$$

und damit:

$$x + \tau > x \qquad \text{Widerspruch zu } x = \sup M.$$

(folgt aus der binomischen Formel: $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}$)

Annahme: $x^n > a$

Nach der Ungleichung von Bernoulli gilt für $\tau := \frac{x^n - a}{n x^n}$. $\left(0 < \tau < \frac{x^n - a}{x^n} < 1\right)$ Damit:

$$\begin{aligned}
(x - \tau x)^n &= x^n (1 - \tau) \geq x^n (1 - n\tau) \\
&= x^n \left(1 - \frac{x^n - a}{x^n}\right) = a.
\end{aligned}$$

$\implies$ Für $y \in M$ gilt:

$$y^n < a < (x - \tau x)^n.$$

$\implies$

$$0 < (x - \tau x)^n - y^n = \underbrace{(x - \tau x - y) \sum_{k=0}^{n} (x - \tau x)^{n-1-k} y^k}_{>0}.$$

$\implies x - \tau x - y > 0$
$\implies y < x - \tau x < x \implies x - \tau x < x$ eine obere Schranke von M. Widerspruch zu $x = \sup M$

(Formel: $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$) $\square$

Bemerkung 1 (Ungleichung von Bernoulli)**.** Sei $x \geq -1$, dann gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \forall n.$$

Definition 1 (Allgemeine rationale Potenzen)**.** $a^q, q = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}, a > 0, a \in \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$a^q = a^{\frac{r}{s}} := \left(\sqrt[s]{a}\right)^r.$$

Bemerkung 2. • Regeln für das Rechnen mit Wurzeln

$$\left(\sqrt[s]{a}\right)^r = (a^{\frac{1}{s}})^r = a^{\frac{r}{s}} = (a^r)^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{a^r}.$$

- Für $a \in \mathbb{R}_+$ wird unter $\sqrt[k]{a}$ **immer** die positive k-te Wurzel verstanden.
  $\implies$ Aussage $\sqrt{a^2} = a$ ist falsch.
  Korrekt: $\sqrt{a^2} = |a|$
  Die Gleichung $x^2 = a$ hat zwei Lösungen: $x_1 = \sqrt{a}, x_2 = -\sqrt{a}$

Bemerkung 3 (Reelle Potenzen)**.** $a \in \mathbb{R}_+, r \in \mathbb{R}, a^r$ - ?

$\exists (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \to r, q_n \in \mathbb{Q}$, damit:

$$a^r := \lim_{n\to\infty} a^q.$$

Noch zu überprüfen: ob der Grenzwert existiert und eindeutig ist

Beispiel 1. $\sqrt{2}, (q_n) = \{1.4, 1.41, 1.414, \ldots\}$

$$a^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} a_n, a_1 = a^{1.4}, a_2 = a^{1.41}, \ldots.$$

Analog über Intervallschachtelung:

$$\begin{aligned} I_1 &= [1.4; 1.5] \\ I_2 &= [1.41; 1.42] \\ I_3 &= [1.414; 1.415] \\ I_n &= [r_n, s_n]. \end{aligned}$$

$$a^{\sqrt{2}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{I_n}.$$

Alternative Definition über exp und ln

$$a^r = \exp(r \ln a).$$

und Reihenentwicklung:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

oder

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

0.1 Mächtigkeit von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

Definition 2 (Mächtigkeit)**.** Die Mächtigkeit einer Menge ist die Anzahl ihrer Elemente.

Eine Menge ist „unendlich”, wenn eine bijektive Abbildung $f : A \to$ Echte Teilmenge von A existiert. Dann $|A| = \infty$.

Eine unendliche Menge, deren Elemente mit Hilfe der natürlichen Zahlen durchnummeriert werden kann, heißt „abzählbar (unendlich)”, sonst „überabzählbar”.

Abzählbarkeit heißt: Es existiert eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$.

Beispiel 2. • $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ dann $|A| = 3$

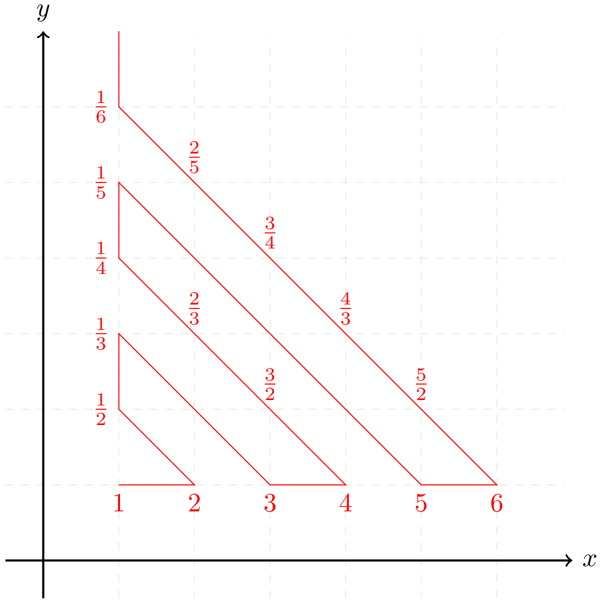
- $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sind unendliche Mengen

Satz 1 (Abzählbarkeit)**.** $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar, $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

$\mathbb{Z}$ Abzählbar. $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, weil $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $z_n = \frac{1}{2}n$ für n gerade und $z_n = \frac{1}{2}(1-n)$ für n ungerade ist eine Abzählung von $\mathbb{Z}$. $\square$

$\mathbb{Q}$ *Abzählbar.* Argumentation nach Cantor

$p \in \mathbb{Q}$, $q = \frac{n}{m}$



Hier werden Punkte ausgelassen, für die n und n nicht teilerfremd sind. Die Gitterpunkte werden durchnummeriert $\implies \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, \dots\}$. $\square$

$\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.* Wir zeigen, dass $[0, 1)$ nicht abzählbar ist.

Angenommen: $[0, 1)$ ist abzählbar, dann sei $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung, z.B.:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, d_{11} d_{12} d_{13} \dots \\ z_2 &= 0, d_{21} d_{22} d_{23} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dann Zahl $y := 0, d_1 d_2 d_3, \dots$ mit

$$d_n := \begin{cases} 2 & \text{falls } d_{nn} = 1 \\ 1 & \text{falls } d_{nn} \neq 1 \end{cases}$$

liegt in $[0, 1)$, $d_i \neq 9 \forall i$, aber $y \notin \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, denn falls $y = z_k$ für ein $k \implies$

$$y = 0, d_{k1}, d_{k2}, d_{k3}, \dots, d_{kk}, \dots.$$

aber $d_k \neq d_{kk}$ nach Konstruktion. $\square$

0.2 Die Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{z = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Addition in $\mathbb{C}$: $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$, $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$:

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Multiplikation in $\mathbb{C}$:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Satz 2 ($\mathbb{C}$ ist ein Körper)**.** Körperaxiome gelten (nachrechnen!)

Nullelement $0 := (0, 0)$
Einselement $1 := (1, 0)$
Imaginäre Einheit $i := (0, 1)$ mit $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$

Inverse der Addition $-z := (-x, -y)$
Inverse der Multiplikation $z^{-1} := \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Schreibweise / Normaldarstellung
$z = (x, y)$ oder $z = x + iy$ mit $i^2 = -1$.

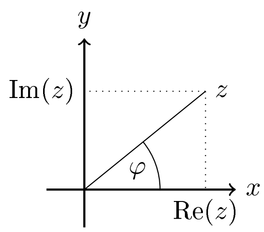
Bemerkung 4 (Rechnen in $\mathbb{C}$)**.**

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i^2y_1y_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2).$$

Definition 3. Für $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$ heißt

$x = \mathrm{Re}(z)$ Realteil von z
$y = \mathrm{Im}(z)$ Imaginärteil von z

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ Betrag von z
$\overline{z} := x - iy = (x, -y)$ zu z konjugierte komplexe Zahl



$\mathrm{Re}(z) = |z| \cos(\varphi)$
$\mathrm{Im}(z) = |z| \sin(\varphi)$
$\Longrightarrow \quad z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = re^{i\varphi}$ mit $r = |z|$.