Aufgabe	A36	A37	A38	A39	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 36. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$$

und f_A die lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{A\cdot} \mathbb{R}^3$.

Beh.: Die Darstellungsmatrix von $\bigwedge^2 f_A \colon \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \to \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3)$ ist gegeben als

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\left(\bigwedge^2 f_A\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Berechne Bild der Basisvektoren unter $\bigwedge^2 f_A$:

$$\begin{aligned} \bigwedge^2 f_A(e_1 \wedge e_2) &= f_A(e_1) \wedge f_A(e_2) \\ &= e_2 \wedge (2e_1 + e_2 + 3e_3) \\ &= 2e_2 \wedge e_1 + e_2 \wedge e_2 + 3e_2 \wedge e_3 \\ &= -2e_1 \wedge e_2 + 3e_2 \wedge e_3 \end{aligned}$$

Für restliche Basisvektoren analog

$$\begin{aligned} \bigwedge^2 f_A(e_1 \wedge e_3) &= 2e_2 \wedge e_3 \\ \bigwedge^2 f_A(e_2 \wedge e_3) &= 2e_1 \wedge e_2 + 4e_1 \wedge e_3 - 1e_2 \wedge e_3. \end{aligned}$$

Durch Ablesen der Koeffizienten folgt die Behauptung. □

Aufgabe 37. Seien R ein Ring und M ein R-Modul.

(a) Beh.: Ist M endlich erzeugt und frei, so ist M flach.

Beweis. Seien N, L R-Moduln und $\varphi\colon N \to L$ ein injektiver R-Modul.hom.
M ist endlich erzeugt und frei. Fixiere Basis $(x_1, \ldots, x_n)$. Dann ist $M \cong R^n$. D.h. es existieren R-Mod.iso. $\Phi_1\colon M \otimes_R N \to R^n \otimes_R N$ und $\Phi_2\colon M \otimes_R L \to R^n \otimes_R L$. Weiter ex. R.-Mod.isomorphismen $f_1\colon R^n \otimes_R N \to N^n$ und $f_2\colon R^n \otimes_R L \to L^n$ mit $f_1((r_1, \ldots, r_n), x) = (r_1 x, \ldots, r_n x)$, analog für f_2.
Weiter definiere:

$$\begin{aligned} \psi\colon N^n &\to L^n \\ (n_1, \ldots, n_n) &\mapsto (\varphi(n_1), \ldots, \varphi(n_n)). \end{aligned}$$

ψ ist R-Modulhom. und injektiv, da φ injektiv ist. Definiere nun weiter

$$\Psi\colon M \otimes_R N \xrightarrow{\Phi_1} R^n \otimes_R N \xrightarrow{f_1} N^n \xrightarrow{\psi} L^n \xrightarrow{f_2^{-1}} R^n \otimes_R L \xrightarrow{\Phi_2^{-1}} M \otimes_R L.$$

Beh.: Ψ ist injektiver R-Modul.hom. mit $\mathrm{id}_M \otimes \varphi = \Psi$.
Ψ ist Verknüpfung von injektiven R-Modul.homomorphismen, also selbst injektiver R-Mod.hom.
Sei nun $a \otimes b \in M \otimes_R N$ beliebig. Dann ist ex. $r_1, \ldots, r_n \in R$, s.d. $a = \sum_{i=1}^n r_i x_i$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \Phi_1(a \otimes b) &= (r_1, \ldots, r_n) \otimes b \\ f_1((r_1, \ldots, r_n) \otimes b) &= (r_1 b, \ldots, r_n b) \\ \psi(r_1 b, \ldots, r_n b) &= (r_1\varphi(b), \ldots, r_n\varphi(b)) \\ f_2^{-1}(r_1\varphi(b), \ldots, r_n\varphi(b)) &= (r_1, \ldots, r_n) \otimes \varphi(b) \\ \Phi_2^{-1}((r_1, \ldots, r_n) \otimes \varphi(b)) &= (a \otimes \varphi(b)) \end{aligned}$$

Also folgt

$$\Psi(a \otimes b) = a \otimes \varphi(b) = (\mathrm{id}_M \otimes \varphi)(a \otimes b).$$

Also stimmen Ψ und $\mathrm{id}_M \otimes \varphi$ auf den Erzeugern überein, also gilt $\Psi = \mathrm{id}_M \otimes \varphi$. Damit ist auch $\mathrm{id}_M \otimes \varphi$ injektiv. □

(b) Seien M flach, N flacher R-Modul und $\varphi\colon M \to N$ injektiver R-Mod.hom.

Beh.: $\varphi \otimes \varphi\colon M \otimes_R M \to N \otimes_R N$ ist injektiv.

Beweis. Es gilt

$$\varphi \otimes \varphi = \underbrace{(\mathrm{id}_N \otimes \varphi)}_{\text{injektiv, da } N \text{ flach}} \circ \underbrace{(\varphi \otimes \mathrm{id}_M)}_{\text{injektiv, da } M \text{ flach}} .$$

Damit ist $\varphi \otimes \varphi$ als Verknüpfung zweier injektiver R-Mod.homs. auch injektiv. □

(c) Beh.: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$ Modul ist nicht flach.

Beweis. Betrachte $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $r \mapsto 2r$. φ ist injektiver R-Modulhomomorphismus, aber

$$(\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}})(1 \otimes \overline{1}) = \varphi(1) \otimes \overline{1} = 2 \otimes \overline{1} = 1 \otimes (2 \cdot \overline{1}) = 1 \otimes \overline{0} = 0.$$

$1 \otimes \overline{1} \neq 0$ in $\mathbb{Z} \otimes_R \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, denn mit $\beta\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, (z, \overline{a}) \mapsto z \cdot \overline{a}$ bilinear und $\beta(1, \overline{1}) = \overline{1} \neq 0$ ist mit UT angewendet auf β und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $1 \otimes \overline{1} \neq 0$. Damit ist ker $(\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}) \neq \{0\}$, also $\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ nicht injektiv. □

Aufgabe 38. Seien R ein Ring und M ein e.e. freier R-Modul.

(a) Seien N e.e. freier R-Modul und $\varphi\colon M \to N$ injektiver R-Mod.hom.

Beh.: $\bigwedge^2 \varphi\colon \bigwedge^2 M \to \bigwedge^2 N$ ist injektiv.

Beweis. Da M und N e.e. und frei ex. nach 35(a) und (b) eindeutige injektive R-Mod.homs. $f\colon \bigwedge^2 M \to M \otimes_R M$ und $g\colon \bigwedge^2 N \to N \otimes_R N$ mit $f(a \wedge b) = a \otimes b - b \otimes a$, analog für g.

Definiere nun $\tilde{g}\colon \bigwedge^2 N \to \mathrm{Bild}(g)$. $\tilde{g}$ ist damit surjektiv und injektiv, also R-Modul.iso., inbes. ex. $\tilde{g}^{-1}\colon \mathrm{Bild}(g) \to \bigwedge^2 N$.

Definiere weiter

$$\psi\colon \bigwedge^2 M \xrightarrow[\text{inj. nach 35(b)}]{f} M \otimes_R M \xrightarrow[\text{inj. nach 37(b)}]{\varphi\otimes\varphi} N \otimes_R N \xrightarrow[\text{inj. nach 35(b)}]{\tilde{g}^{-1}} \bigwedge^2 N.$$

Z.z.: ψ wohldefiniert, g.z.z. $\mathrm{Bild}((\varphi \otimes \varphi) \circ f) = \mathrm{Bild}(g)$. Dazu seien $a, b \in M$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\varphi \otimes \varphi)(f(a \wedge b)) &= (\varphi \otimes \varphi)(a \otimes b - b \otimes a)\\ &= (\varphi(a) \otimes \varphi(b) - \varphi(b) \otimes \varphi(a))\\ &= g(\varphi(a) \wedge \varphi(b)) \in \mathrm{Bild}(g)\end{aligned}$$

Da Elemente der Form $a \wedge b$ $\bigwedge^2 M$ erzeugen, folgt Behauptung. Damit ist ψ als Verkettung von injektiven R-Mod.homs, injektiver R-Mod.hom. Bleibt zu zeigen: $\psi = \bigwedge^2 \varphi$. Mit obiger Rechnung folgt sofort

$$\begin{aligned}\psi(a \wedge b) &= \tilde{g}^{-1}((\varphi \otimes \varphi) f(a \wedge b))\\ &= \tilde{g}^{-1}(g(\varphi(a) \wedge \varphi(b)))\\ &= \varphi(a) \wedge \varphi(b)\\ &= \bigwedge^2 \varphi(a \wedge b).\end{aligned}$$

Da $\bigwedge^2 M$ von Elementen der Form $a \wedge b$ erzeugt wird, folgt $\psi = \bigwedge^2 \varphi$. Da ψ injektiv als Verkettung von injektiven R-Mod.homs, ist $\bigwedge^2 \varphi$ injektiv. □

(b) Beh.: Für $m_1, m_2 \in M$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Die Familie (m_1, m_2) ist linear unabhängig.

(ii) Aus $r(m_1 \wedge m_2) = 0$ in $\bigwedge^2 M$ mit $r \in R$ folgt $r = 0$.

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Definiere

$$\begin{aligned}\varphi\colon R &\to \bigwedge^2 M \\ r &\mapsto r(m_1 \wedge m_2).\end{aligned}$$

Z.z.: φ ist injektiv. Sei (e_1, e_2) die Standardbasis des R^2. Definiere damit

$$\begin{aligned}&\Phi\colon R \to \bigwedge^2 R^2, \quad r \mapsto r(e_1 \wedge e_2) \\ &\psi\colon R^2 \to M, \quad \psi(e_i) = m_i \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

Da $\{e_1 \wedge e_2\}$ Basis von $\bigwedge^2 R^2$, ist $e_1 \wedge e_2$ l.u. und damit Φ injektiv. Weiter sind R^2 und M e.e. und frei und ψ injektiver R-Mod.hom. Mit (a) folgt damit, dass $\bigwedge^2 \psi$ injektiv ist. Außerdem gilt für $r \in R$ beliebig:

$$\begin{aligned}\left(\bigwedge^2 \psi\right)(\Phi(r)) &= (\bigwedge^2 \psi)(r(e_1 \wedge e_2)) \\ &= r(\psi(e_1) \wedge \psi(e_2)) \\ &= r(m_1 \wedge m_2) \\ &= \varphi(r).\end{aligned}$$

Damit gilt $\varphi = \bigwedge^2 \psi \circ \Phi$ und damit φ injektiv, als Verkettung injektiver R-Mod.homs.

(ii) $\implies$ (i): Kontraposition. Seien (m_1, m_2) linear abhängig. Dann ex. ein $\alpha \in R$ mit $m_1 = \alpha m_2$. Damit folgt

$$1 \cdot (m_1 \wedge m_2) = 1 \cdot (\alpha m_2 \wedge m_2) = \alpha(m_2 \wedge m_2) = 0,$$

aber $1 \neq 0$ in R, da $R \neq 0$ nach Konvention der VL von Kapitel 9. □

(c) Beh.: Für $\mathrm{Rang}(M) = 2$ und $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) φ ist injektiv

(ii) $\det(\varphi) \in R$ ist kein Nullteiler

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Da φ injektiv, ist $\bigwedge^2 \varphi$ injektiv. Sei (x_1, x_2) Basis von M. Dann gilt

$$\bigwedge^2 \varphi(\underbrace{x_1 \wedge x_2}_{\neq 0}) = \varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2) = \det(\varphi)(x_1 \wedge x_2) \neq 0.$$

Also gilt $\det(\varphi) \neq 0$. Sei nun $r \in R$ beliebig mit $\det(\varphi) r = 0$. Dann betrachte

$$\bigwedge^2 \varphi(rx_1 \wedge x_2) = \varphi(rx_1) \wedge \varphi(x_2) = \det(\varphi) r(x_1 \wedge x_2) = 0 = r\underbrace{(\det(\varphi)x_1 \wedge x_2)}_{\neq 0}.$$

Da (x_1, x_2) Basis sind auch $\det(\varphi)x_1$ und x_2 linear unabhängig, d.h. mit (b) folgt $r = 0$.

(ii) $\implies$ (i): Sei $m \in M$ beliebig mit $\varphi(m) = 0$ und (x_1, x_2) Basis von M. Ang.: $m \neq 0$. Dann ex. $a, b \in R$ mit $m = ax_1 + bx_2$ mit $a \neq 0 \vee b \neq 0$. O.E.: $a \neq 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned}0 &= \varphi(m) \wedge \varphi(x_2) \\ &= \det(\varphi)(m \wedge x_2) \\ &= \det(\varphi)(ax_1 + bx_2) \wedge x_2 \\ &= \det(\varphi)(ax_1 \wedge x_2) \\ &= \det(\varphi) \cdot a(x_1 \wedge x_2).\end{aligned}$$

Da x_1, x_2 l.u., folgt mit (b), dass $\det(\varphi) \cdot a = 0$. Da $\det(\varphi)$ kein Nullteiler, folgt $a \neq 0$ ↯. □

Aufgabe 39. Seien $N = \mathbb{Z}$, $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $f\colon N \to M \oplus M$, $g : N \oplus M \to M$ gegeben durch

$$f(n) = (2n, 0) \quad \text{und} \quad g(n, (\overline{m_1}, \ldots,)) = (\overline{n}, \overline{m_1}, \ldots).$$

(a) Beh.: Die Folge $0 \to N \xrightarrow{f} N \oplus M \xrightarrow{g} M \to 0$ ist eine kurze exakte Folge von $\mathbb{Z}$-Moduln.

Beweis. Offensichtlicherweise ist f injektiv und g surjektiv. Bleibt zu zeigen: $\ker g = \operatorname{im} f$.

„$\subseteq$": Sei $x \in \ker g$. Dann ex. $n, m_1, m_2, \ldots \in \mathbb{Z}$ mit $x = (n, (\overline{m_1}, \ldots))$. Da $g(x) = 0$ folgt $\overline{n} = \overline{m_1} = \ldots = 0$. Damit ex. $z \in \mathbb{Z}$ mit $z = 2z$. Also ist $f(z) = (2z, 0) = (n, 0) = (n, (\overline{m_1}, \overline{m_2}, \ldots)) = x$. Damit ist $x \in \operatorname{im} f$.

„$\supseteq$": Sei $x \in \operatorname{im} f$. Dann $\exists n \in \mathbb{Z}$, s.d. $f(n) = (2n, 0) = x$. Damit folgt $g(x) = g(2n, 0) = (\overline{2n}, 0, \ldots) = (\overline{0}, \overline{0}, \ldots) = 0$. Also $x \in \ker g$. □

(b) Beh.: Die Folge aus (a) zerfällt nicht.

Beweis. Ang.: Die Folge aus (a) zerfällt. Dann ex. ein $\mathbb{Z}$-Untermodul $T \subseteq N \oplus M$, s.d. $g|_T : T \to M$ Isomorphismus ist. Wähle $x := (\overline{1}, \overline{0}, \ldots) \in M$. Da $g|_T$ surjektiv, ex. ein $y \in T$, s.d. $g(y) = x$. Es ex. $n, m_1, \ldots \in \mathbb{Z}$ mit $y = (n, (\overline{m_1}, \ldots))$. Wegen

$$g(y) = g(n, (\overline{m_1}, \ldots)) = (\overline{n}, \overline{m_1}, \ldots) = (\overline{1}, \overline{0}, \ldots) = x$$

folgt $n \equiv 1 \pmod n$. Da T $\mathbb{Z}$-Untermodul, ist auch $2y = (2n, (\overline{2m_1}, \ldots)) = (2n, 0) \in T$. Damit folgt

$$g(y) = g(2n, 0) = (\overline{2n}, \overline{0}, \ldots) = (\overline{0}, \overline{0}, \ldots) = 0.$$

Da $n \neq 0$ und $\mathbb{Z}$ nullteilerfrei, folgt $y = (2n, 0) \neq 0$, folgt $\ker g|_T \neq \{0\}$ ↯. □