Aufgabe	A28	A29	A30	A31	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 28. Seien R ein Ring, M und N zwei R-Moduln und $f\colon M \to N$ R-Modulhom. Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent

(i) f ist R-Mod.iso

(ii) Für alle R-Moduln L ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(L,M) &\to \mathrm{Hom}_R(L,N)\\ g &\mapsto f\circ g.\end{aligned}$$

bijektiv.

Beweis.

- (i) $\implies$ (ii): φ bezeichne die gegebene Abbildung. Sei f R-Mod.iso. und $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_R(L,M)$ mit $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$. Da f Iso. ex. ein $f^{-1}\colon N \to M$. Damit folgt

$$\varphi(g_1) = \varphi(g_2) \implies f\circ g_1 = f\circ g_2 \implies f^{-1}\circ f\circ g_1 = f^{-1}\circ f\circ g_2 \implies g_1 = g_2.$$

Also φ injektiv.
Sei nun $h \in \mathrm{Hom}_R(L,N)$ beliebig. Wähle $g = f^{-1}\circ h$. Damit folgt

$$\varphi(g) = \varphi(f^{-1}\circ h) = f\circ f^{-1}\circ h = h.$$

Also φ surjektiv und damit bijektiv.

- (ii) $\implies$ (i): Mit $L = N$ folgt $\varphi\colon \mathrm{Hom}_R(N,M) \to \mathrm{Hom}_R(N,N)$ bijektiv. Also ex. φ^{-1}. Definiere $h := \varphi^{-1}(\mathrm{id}_N)$. Damit folgt $\varphi(h) = f\circ h = \mathrm{id}_N$.
Setze nun $L = M$. Dann folgt $\psi\colon \mathrm{Hom}_R(M,M) \to \mathrm{Hom}_R(M,N)$ bijektiv. Es ist dann $\psi(\mathrm{id}_M) = f\circ \mathrm{id}_M = f$. Damit folgt

$$\psi(h\circ f) = \underbrace{f\circ h}_{\mathrm{id}_N}\circ f = f = \psi(\mathrm{id}_M).$$

Da ψ injektiv, folgt $h\circ f = \mathrm{id}_M$.
Insgesamt folgt mit $f^{-1} := h$, f bijektiv und damit Iso.

□

Aufgabe 29. (a) Beh.: $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 0$.

Beweis. Es ist nach VL:

$$\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}/(2\mathbb{Z})\mathbb{Q}.$$

Aber $(2\mathbb{Z})\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, denn $(2\mathbb{Z})\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$ klar und $\mathbb{Q} \subseteq (2\mathbb{Z})\mathbb{Q}$, denn für $q \in \mathbb{Q}$ ist $q = 2\cdot \frac{1}{2}q \in (2\mathbb{Z})\mathbb{Q}$. Also $\mathbb{Q}/(2\mathbb{Z})\mathbb{Q} = 0$. Damit folgt die Beh. □

(b) Beh.: $2\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Beweis. Es ist nach VL:

$$2\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} 2\mathbb{Z} \cong 2\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}2\mathbb{Z})$$

Es ist $2\mathbb{Z}2\mathbb{Z} = (4) = 4\mathbb{Z}$ also $2\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}2\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Weiter ist $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, denn

$$\#\{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\} = \#\{\ldots, 0+4\mathbb{Z}, 2+4\mathbb{Z}, \underbrace{4+4\mathbb{Z}}_{0+4\mathbb{Z}}, \ldots\} = 2 = \#\{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}.$$

□

(c) Beh.: $2 \otimes 1 = 0$ in $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, aber $2 \otimes 1 \neq 0$ in $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Beweis. Es ist $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ni 2 \otimes \overline{1} = (2 \cdot 1) \otimes \overline{1} = 1 \otimes (2 \cdot \overline{1}) = 1 \otimes \overline{0} = 0$.
Definiere $\beta\colon 2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $(a, \overline{b}) \mapsto \overline{\frac{a}{2}b}$. β ist wohldefiniert, da $\forall a \in 2\mathbb{Z}$ ist $\frac{a}{2} \in \mathbb{Z}$. Außerdem β bilinear. Wende (UT) auf $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und β an. Erhalte einen $\mathbb{Z}$-Mod.hom $f\colon 2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit $f \circ \tau = \beta$. Ang.: $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ni 2 \otimes \overline{1} = 0$. Dann folgt

$$f(\tau(2, \overline{1})) = f(2 \otimes \overline{1}) = f(0) = \overline{0} \neq \overline{1} = \beta(2, \overline{1}) \quad ↯.$$

Also $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ni 2 \otimes \overline{1} \neq 0$. □

Aufgabe 30. Sei R ein Ring, $I \subseteq R$ Ideal und M R-Modul.

(a) Beh.: Es gibt einen eindeutigen surjektiven R-Mod.hom. $f\colon I \otimes_R M \to IM$ mit $f(a \otimes m) = am$ für $a \in I, m \in M$.

Beweis. Definiere $\beta\colon I \times M \to IM$, $(a, m) \mapsto am$. β bilinear. Mit (UT) angewendet auf IM und β, existiert genau ein R-Mod.hom. $f\colon I \otimes_R M \to IM$ mit $f \circ \tau = \beta$. Damit folgt für $a \in I$, $m \in M$:

$$f(a \otimes m) = f(\tau(a, m)) = \beta(a, m) = am.$$

Sei nun $m \in IM$ beliebig. Dann ex. $a_i \in I$, $m_i \in M$ mit

$$\begin{aligned} m &= \sum_{i=1}^{n} a_i m_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(a_i \otimes m_i) \\ &\overset{f\ R\text{-Hom.}}{=} f\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes m_i\right)}_{:=\xi \in I \otimes_R M} \\ &= f(\xi). \end{aligned}$$

Also f surjektiv. □

(b) Beh.: f aus Teil (a) ist i.A. nicht injektiv.

Beweis. Mit $R = \mathbb{Z}$, $I = 2\mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ folgt

$$f\colon 2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}\,(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0,$$

aber mit 29(b) ist $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \overset{\sim}{=} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0$. Damit ist f nicht injektiv. □

Aufgabe 31. Sei K Kp, V e.d. K-VR. und $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$. Seien $\lambda \in K$ EW von f und $\mu \in K$ EW von g.

(a) Beh.: Für $v, w \in V \setminus \{0\}$ gilt $v \otimes w \neq 0$ in $V \otimes_K V$.

Beweis. Seien $v, w \in V \setminus \{0\}$. Da V VR. und $v \neq 0 \neq w$, ergänze v zu Basis $(v_i)_{i \in I}$ und w zu Basis $(w_i)_{i \in I}$ mit $v = v_1$ und $w = w_1$. Dann definiere

$$\beta\colon V \times V \to K$$
$$(x, y) = \left(\sum_{i \in I} \alpha_i v_i, \sum_{i \in I} \beta_i w_i\right) \mapsto \sum_{i \in I} \alpha_i \cdot \sum_{i \in I} \beta_i.$$

Da $(v_i)_{i\in I}$ und $(w_i)_{i\in I}$ Basen, sind die Darstellungen eindeutig und damit β wohldefiniert. Außerdem β bilinear, denn $\forall x, y, z \in V$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\begin{aligned}\beta(\lambda x + y, z) &= \beta\left(\sum_{i\in I}(\lambda\alpha_i + \beta_i)v_i, \sum_{i\in I}\gamma_i w_i\right) \\ &= \sum_{i\in I}(\lambda\alpha_i + \beta_i) \cdot \sum_{i\in I}\gamma_i \\ &= \lambda\sum_{i\in I}\alpha_i\sum_{i\in I}\gamma_i + \sum_{i\in I}\beta_i\sum_{i\in I}\gamma_i \\ &= \lambda\beta(x, z) + \beta(y, z).\end{aligned}$$

Für zweites Argument analog. Weiter ist $v = 1 \cdot v_1$ und $w = 1 \cdot w_1$, also $\beta(v, w) = 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$.

Mit (UT) angewendet auf β und K, existiert ein R-Mod.hom. $f\colon V \otimes_K V \to K$. mit $f \circ \tau = \beta$. Ang.: $v \otimes w = 0$. Dann ist $f(\tau(v \otimes w)) = f(v \otimes w) = f(0) = 0 \neq 1 = \beta(v, w)$. Also $v \otimes w \neq 0$. $\square$

(b) Beh.: $\lambda\mu$ ist EW von $f \otimes g \in \mathrm{End}_K(V \otimes_K V)$.

Beweis. Sei v EV von f bezügl. λ und w EV von g bezügl. μ. Dann gilt

$$\begin{aligned}(f \otimes g)(v \otimes w) &= f(v) \otimes g(w) \\ &= \lambda v \otimes \mu w \\ &= \lambda\mu(v \otimes w).\end{aligned}$$

Da v, w EV sind $v \neq 0 \neq w$, also wegen (a) auch $v \otimes w \neq 0$ und damit EV von $f \otimes g$ zu $\lambda\mu$. Also insbes. $\lambda\mu$ EW von $f \otimes g$. $\square$

(c) Beh.: $\lambda + \mu$ ist EW von $f \otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V \otimes g \in \mathrm{End}_K(V \otimes_K V)$.

Beweis. Sei v EV von f bezügl. λ und w EV von g bezügl. μ. Dann gilt

$$\begin{aligned}(f \otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V \otimes g)(v \otimes w) &= (f \otimes \mathrm{id}_V)(v \otimes w) + (\mathrm{id}_V \otimes g)(v \otimes w) \\ &= f(v) \otimes \mathrm{id}_V(w) + \mathrm{id}_V(v) \otimes g(w) \\ &= \lambda v \otimes w + v \otimes \mu w \\ &= (\lambda + \mu)(v \otimes w).\end{aligned}$$

Da v, w EV sind $v \neq 0 \neq w$, also wegen (a) auch $v \otimes w \neq 0$ und damit EV von $f \otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V \otimes g$ zu $\lambda + \mu$. Also insbes. $\lambda + \mu$ EW von $f \otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V \otimes g$. $\square$