Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. (a) Es seien $f: V \to W$ und $g : W \to V$ lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen V und W.

Beh.: Es existiert genau dann ein $v \in V \setminus \{0\}$ mit $(g \circ f)(v) = v$, wenn es ein $w \in W \setminus \{0\}$ gibt mit $(f \circ g)(w) = w$.

Beweis. „ $\Longrightarrow$ " Es sei $w \in W$ mit $(f \circ g)(w) = w$. Dann definiere $v := g(w)$. Wegen $f(g(w)) = f(v) = w$ folgt $g(f(v)) = g(w) = v$.

„ $\Longleftarrow$ " folgt analog. □

(b) Es sei $A \in M_{n,m}(K)$ und $B \in M_{m,n}(K)$.

Beh.: $E_n - AB$ invertierbar $\iff$ $E_m - BA$ invertierbar.

Beweis. „ $\Longrightarrow$ " Es seien $a: K^m \to K^n$ und $b: K^n \to K^m$ die zu A und B gehörigen Abbildungen.

Da $E_n - AB$ invertierbar, folgt $id_{K^n} - a \circ b$ ist Automorphismus. Also ist zu zeigen, dass der Endomorphismus $id_{K^m} - b \circ a$ bijektiv ist.

Da $id_{K^n} - a \circ b$ bijektiv, insbesondere injektiv ist, folgt

$$\begin{aligned} &\ker(id_{K^n} - a \circ b) = \{0\} \\ \Longrightarrow\ & id_{K^n}(v) - a(b(v)) \neq 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0\} \\ \Longrightarrow\ & v \neq a(b(v)) \quad \forall v \in V \setminus \{0\} \quad (*) \end{aligned}$$

Sei nun $w \in K^m$ mit $id_{K^m} - b(a(w)) = 0$.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\ & w = b(a(w)) \\ \overset{\text{(a) und }*}{\Longrightarrow}\ & \forall w \in K^m \setminus \{0\} \colon w \neq (b(a(w)) \\ \Longrightarrow\ & w = 0 \\ \Longrightarrow\ & \ker(id_{K^m} - b \circ a) = \{0\}. \end{aligned}$$

Damit ist $id_{K^m} - b \circ a$ ein injektiver Endomorphismus, also auch bijektiv, also Automorphismus. $\Longrightarrow$ $E_m - BA$ invertierbar.

„ $\Longleftarrow$ " folgt analog. □

Aufgabe 2. Es sei K Körper und $A \in M_{n,m}(K)$ und $B \in M_{m,n}(K)$ mit $ABA = A$.

(a) Beh.: $\ker A = \{x - BAx \mid x \in K^m\}$

Beweis. Zz.: $\ker A \subset \{x' - BAx' \mid x' \in K^m\}$

Sei $x \in \ker A$, d.h. $Ax = 0$, damit:

$$\begin{aligned} & x - BAx = x - B \cdot 0 = x \\ \Longrightarrow\ & x \in \{x' - BAx' \mid x' \in K^m\}. \end{aligned}$$

Zz.: $\{x - BAx \mid x \in K^m\} \subset \ker A$

Sei $r \in K^m$, dann $x := r - BAr$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} & Ax = Ar - ABAr \overset{ABA=A}{=} Ar - Ar = 0 \\ \Longrightarrow\ & x \in \ker A. \end{aligned}$$

□

(b) Beh.: $Ax = b$ hat eine Lösung $\iff$ $ABb = b$

Beweis.

$$\begin{aligned} & Ax = b \text{ hat eine Lösung} \\ \iff & b \in \text{Bild}(A) \\ \iff & \exists x \in K^m \colon Ax = ABAx = AB(Ax) = b \\ \iff & ABb = b. \end{aligned}$$

□

Beh.: $L := \{x \in K^m \mid Ax = b\} = \{Bb + x' - BAx' \mid x' \in K^m\}$

Beweis. (i) Zz.: $L \subset \{Bb + x - BAx \mid x \in K^m\}$,
Sei $x \in L$ beliebig, d.h. $Ax = b$. Nun g.z.z $\exists r \in K^m \colon x = Bb + r - BAr$. Wähle $k := x - Bb \in K^m$. Damit:

$$\begin{aligned} & Ak = Ax - ABb \overset{ABb=b}{=} b - b = 0 \\ \implies & k \in \ker(A) \\ \overset{(a)}{\implies} & \exists r \in K^m \colon k = r - BAr. \text{ Fixiere } r \\ \implies & Bb + r - BAr = Bb + k = Bb + x - Bb = x. \end{aligned}$$

(ii) Zz.: $\{Bb + x - BAx \mid x \in K^m\} \subset L$.
Sei $r \in K^m$ beliebig, dann definiere $x := Bb + r - BAr \in K^m$. Nun g.z.z. $Ax = b$.

$$Ax = ABb + Ar - ABAr \overset{ABb=b}{=} b + Ar - ABAr \overset{ABA=A}{=} b.$$

□

Aufgabe 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\implies$ Rang 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\implies$ Rang 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\implies$ Rang 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\implies$ Rang 1

Für $a = 1$ folgt direkt:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\implies$ Rang 1

Für $a = -1$ folgt

$$\begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \; | \cdot -1 \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\implies$ Rang 1

Für $a \neq 1 \wedge a \neq -1 \implies 1 - a^2 \neq 0$, damit:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; | \cdot \frac{1}{1-a^2}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\implies$ Rang 2

Aufgabe 4. (a) Beh.: $\underline{v} = ((1,2)^t, (0,-1)^t)$ ist Basis von $\mathbb{Q}^2$.

Beweis. Zu zeigen.: $\underline{v}$ ist linear unabhängig
Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ mit

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$
$$\implies a = 0 \wedge 2a - b = 0 \implies b = 0.$$

$\implies$ $\underline{v}$ ist linear unabhängig und wegen $\dim \mathbb{Q}^2 = 2$ eine Basis von $\mathbb{Q}^2$. □

Beh.: $\underline{w} = ((1,1)^t, (3,2)^t)$ ist Basis von $\mathbb{Q}^2$

Beweis. Zu zeigen.: $\underline{v}$ ist linear unabhängig
Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ mit

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$
$$\implies a + 3b = 0 \wedge a + 2b = 0 \implies b = a = 0.$$

$\implies$ $\underline{v}$ ist linear unabhängig und wegen $\dim \mathbb{Q}^2 = 2$ eine Basis von $\mathbb{Q}^2$. □

Beh.:

$$T = M_{\underline{e}}^{\underline{v}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Zu Überprüfen für die zwei Basisvektoren aus $\underline{v}$.

(i) $v_1 = (1,2)^t$. $\phi(v_1) = (1,0)^t$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) $v_2 = (0,-1)^t$. $\phi(v_2) = (0,1)^t$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

□

Beh.:

$$T = M_{\underline{e}}^{\underline{w}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Zu Überprüfen für die zwei Basisvektoren aus $\underline{w}$.

(i) $w_1 = (1,1)^t$. $\phi(w_1) = (1,0)^t$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) $w_2 = (3,2)^t$. $\phi(w_2) = (0,1)^t$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

□

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ + \end{matrix} \quad |\cdot -1 \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\implies T = \left(M_{\underline{e}}^{\underline{v}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ + \end{matrix} \quad |\cdot -1 \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ -3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\implies S = \left(M_{\underline{e}}^{\underline{w}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) $M_{\underline{e}}^{\underline{e}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ durch ablesen, die restlichen Matrizen ergeben sich durch Multiplikation:

$$M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(f) = M_{\underline{v}}^{\underline{e}}(\mathrm{id}_V) \cdot M_{\underline{e}}^{\underline{e}}(f) \cdot M_{\underline{e}}^{\underline{v}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$M_{\underline{w}}^{\underline{w}}(f) = M_{\underline{w}}^{\underline{e}}(\mathrm{id}_V) \cdot M_{\underline{e}}^{\underline{e}}(f) \cdot M_{\underline{e}}^{\underline{w}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} -12 & -29 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$
$$M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\mathrm{id}_V) = M_{\underline{v}}^{\underline{e}}(\mathrm{id}_V) \cdot M_{\underline{e}}^{\underline{w}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(d)

$$AC - CB = M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(f) \cdot M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\mathrm{id}_V) - M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\mathrm{id}_V) \cdot M_{\underline{w}}^{\underline{w}}(f) = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f) - M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f) = 0.$$