Funktheo Blatt 10 — Christian Merten, Julia Filla

A1	A2	A3	Σ

A1 (i) **Beh.** $h(z) := f(z) - \sum_{j=1}^{d} \frac{\operatorname{res}_{z_j} f}{z - z_j}$ lässt sich zu ganzer Funktion fortsetzen.

Bew. Da Q nur einfache NS und $(f, g) = 1$ sind z_j einfache Pole. Also $\operatorname{res}_{z_j} f = \lim_{z \to z_j} (z - z_j) f(z)$.

Also folgt
$$\lim_{z \to z_k} (z - z_k)\, h(z) = \lim_{z \to z_k} \left[(z - z_k) f(z) - \sum_{j=1}^{d} \frac{(z - z_k) \lim_{z \to z_j} (z - z_j) f(z)}{z - z_j} \right]$$

GW existiert, da z_k einfacher Pol von f, also $f(z) = \frac{g(z)}{z - z_k}$ in Umgebung von z_k für geeignetes g.

$$\overset{(*)}{=} \lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) - \sum_{j=1}^{d} \lim_{z \to z_k} \frac{z - z_k}{z - z_j} \lim_{z \to z_j} (z - z_j) f(z)$$
$$= \lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) - \lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z)$$
$$= \lim_{z \to z_k} \left[(z - z_k) f(z) - (z - z_k) f(z) \right]$$
$$= 0$$

Also z_k hebbar. $\square$

(ii) **Beh.** $h \equiv 0$.

Bew. Wegen $\deg P < \deg Q$ folgt $\lim_{z \to \infty} |f(z)| = \lim_{z \to \infty} \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| = 0$. Außerdem ist $\lim_{z \to \infty} \left| \frac{1}{z - z_j} \right| = 0$. Also folgt $0 \le \lim_{z \to \infty} |h(z)| \le \lim_{z \to \infty} \left[|f(z)| + \sum_{j=1}^{d} \frac{|\operatorname{res}_{z_j} f|}{|z - z_j|} \right] = 0$.

Also ex. ein $R > 0$ sd. $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$: $|h(z)| < 1$. Da außerdem h stetig ist h auf dem Kompaktum $\overline{U_R(0)}$ beschränkt. Es ex. also ein $M \in \mathbb{R}$ mit $M \ge 1$ sd. $|h(z)| \le M$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Nach Liouville ist die ganze Funktion h also konstant. Da $\lim_{z \to \infty} h(z) = 0$ folgt $h \equiv 0$ $\square$

A2 (a) $f(z) = \frac{z}{(z-2)\cdot(z-3)}$ $\quad \operatorname{res}_2 f = \lim_{z\to 2} (z-2) f(z) = -2$, $\operatorname{res}_3 f = \lim_{z \to 3} (z-3) f(z) = 3$

also nach A1: $f(z) = \frac{3}{z-3} - \frac{2}{z-2}$. Es gilt weiter

$$\frac{3}{z-3} = -\frac{1}{1-\frac{z}{3}} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{3^n} z^n \quad \text{für } |z| < 3$$

$$-\frac{2}{z-2} = +\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} +\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n \quad \text{für } |z| < 2.$$

(i) $D_0^2(0)$: $|z| < 2$ und $|z| < 3$ es folgt: $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) z^n$$

(ii) $D_2^3(0)$: $-\frac{2}{z-2} = -\frac{2}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} -\frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} z^{-n-1}$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{-n} \quad \text{für } |z| > 2.$$

also $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{3^n} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{-n} = -\sum_{n=-1}^{-\infty} 2^{-n} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} z^n$

(iii) $D_3^{\infty}(0)$: $\frac{3}{z-3} = \frac{3}{z} \frac{1}{1-\frac{3}{z}} \overset{\text{geom.}}{=} \frac{3}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n z^{-n}$ für $|z| > 3$

also $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n z^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (3^n - 2^n) z^{-n}$

(iv) $D_0^1(2)$: $\frac{3}{z-3} = -3 \frac{1}{1-(z-2)} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} -3 \sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^n$ für $|z-2| < 1$

also $f(z) = -3 \sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^n - \frac{2}{z-2}$

(b) Die Zwischenschritte sind keine Laurententwicklungen und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$ ist konvergent $\Leftrightarrow |z| > 1$ und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist konvergent $\Leftrightarrow |z| < 1$, also ist $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n$ keine konvergente Laurentreihe und damit auch keine Laurententwicklung.

A3 (a) $f: \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ merom. mit $f(\overline{\mathbb{C}}) \subseteq \mathbb{C}$. Beh.: f konstant

Bew.: Das induziert eine Abb. $g = f\big|_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

Es ist $\hat{f}(0) = f(\infty) = w \in \mathbb{C}$ und $\hat{f}$ meromorph auf $\mathbb{C}$, insbes. stetig in $z=0$ und $\hat{f}(z) = f(\frac{1}{z}) \in \mathbb{C}$ für $z \neq 0$. Also ist $\hat{f}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, insbes. stetig und damit auf dem Kompaktum $\overline{U_1(0)}$ beschränkt. Also ex. ein $M \geq 0$ sd. $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$: $|f(z)| = |\hat{f}(\frac{1}{z})| \leq M$. Da gleichzeitig $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holom., insbes. stetig ist f auch auf dem Kompaktum $\overline{U_1(0)}$ beschränkt, also f auf $\mathbb{C}$ beschränkt, also nach Liouville auf $\mathbb{C}$ konstant. Also ist auch $\hat{f}$ konstant auf $\mathbb{C}^\times$ und wegen der Stetigkeit in 0 auch auf $\mathbb{C}$ konstant, also folgt f auf $\overline{\mathbb{C}}$ konstant. $\square$

(b) (i) f_1 hat offensichtlich genau eine isolierte Singularität, einen einfachen Pol bei $z=0$, also $f_1 : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ offensichtlich meromorph.
Außerdem ist $\hat{f}_1(z) = \frac{1}{\frac{1}{z}} = z$ offensichtlich auf $\mathbb{C}$ meromorph mit $\hat{f}_1(0) = 0$ also ist $f_1 : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ meromorph mit $f_1(\infty) = \hat{f}_1(0) = 0$.

(ii) Die Funktion $\hat{f}_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $z \longmapsto \exp(\frac{1}{z})$ hat nach V2 in $z=0$ eine wesentliche Singularität, also $\hat{f}_2$ nicht meromorph, also f_2 nicht meromorph fortsetzbar.

(iii) Es ist $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ also $\cos(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{-\infty} (-1)^{-n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$. Also sind unendlich viele Koeff. a_{-n} in der Laurententwicklung $\neq 0$, also hat $\cos(\frac{1}{z})$ bei $z=0$ eine wesentliche Singularität, ist also nicht meromorph fortsetzbar, da bereits auf $\mathbb{C}$ nicht meromorph.

(iv) Es ist $f_4(z) = \frac{z^2+1}{z+i} = \frac{(z+i)(z-i)}{z+i} = z-i$ also hebbare Singularität bei $z=-i$.
Also ist $f_4 : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ meromorph ohne Pole. Außerdem ist $\hat{f}_4(z) = \frac{1}{z} - i$ meromorph auf $\mathbb{C}$, da genau ein Pol bei $z=0$. Es ist $\hat{f}_4(0) = \infty$ also f_4 merom. fortsetzbar mit $f_4(\infty) = \infty$.