Funktheo Blatt 11 Christian Merten, Julia Fila

A1	A2	A3	Σ

A1 $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a \in U$, $f : U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph

(a) Beh.: $\operatorname{res}_a f' = 0$

Bew.: Für $r > 0$ hinreichend klein, ist $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} f'(z)\, dz = 0$ da f' mit f eine holom. Stammfunktion auf $U \setminus \{a\}$ hat. $\square$

(b) Bew.: Sei $c = \operatorname{res}_a f$. Dann ist für $r > 0$ hinreichend klein für bel. geschl. γ mit $\operatorname{Bild}(\gamma) \subseteq \dot{U}_r(a)$.

$$\int_\gamma \left[f(z) - \frac{\operatorname{res}_a f}{z-a} \right] dz = \int_\gamma f(z)\, dz - \operatorname{res}_a f \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

$$\overset{\text{Res.satz}}{=} 2\pi i \operatorname{res}_a f - \operatorname{res}_a f \, 2\pi i$$

$$= 0$$

Da γ bel., hat die gegebene Funktion eine Stamm-fkt auf $\dot{U}_r(a)$.

Habe umgekehrt die geg. Fkt auf $\dot{U}_{2r}(a)$ eine Stamm-fkt. Dann gilt analog

$$0 = 2\pi i \operatorname{res}_a f - 2\pi i c \implies c = \operatorname{res}_a f.$$

$\square$

A2 (a) Bew.: Sei $z \in \mathbb{C}$ bel. Da $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ ist $z = a w_1 + b w_2$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

Nun wähle die Vertreter t_1 bzw $t_2 \in [0,1]$ von a bzw b mod $\mathbb{Z}$.

Dann ist $a - t_1 \in \mathbb{Z}$ und $b - t_2 \in \mathbb{Z}$ also $f(z) = f(t_1 w_1 + t_2 w_2)$.

Also ist $f(\mathbb{C}) = f(\mathcal{F})$.

Da $\mathcal{F}$ kompakt und f stetig, ist $f(\mathcal{F}) = f(\mathbb{C})$ kompakt, insbes. beschränkt. Falls f holomorph, ist also f nach Liouville konstant. $\square$

Vorbem.: A beschränkt, dann hat A maximal endlich viele isolierte Punkte, denn:

Ang. Es ex. eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarw. versch. isol. Punkte in A. Da A beschränkt ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, also hat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach Bolzano-Weierstraß einen HP. ↯ $\square$

(b) Bew.: Da $\mathcal{F}$ beschränkt ex. ein $r > 0$ s.d. $\mathcal{F} \subseteq U_r(0)$ und $U_r(0)$ ist Sterngebiet, insbes. Elementargebiet. Außerdem hat f nur isolierte Pole, also nach der Vorbem. in $\mathcal{F}$ nur endl. viele paarw. versch. $z_1, \ldots, z_n$. Außerdem ist $\partial \mathcal{F}$ stückweise glatt. und f holomorph auf $U_r(0) \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$. Also gilt nach Res.satz:

$$\int_{\partial F} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\chi(\partial F, z_j)}_{=1} \operatorname{res}_{z_j} f.$$ Allerdings gilt gleichzeitig nach Definition

$$\int_{\partial F} f(z)\,dz \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 f(tw_1)\,|w_1|\,dt + \int_0^1 f(tw_2+w_1)\,|w_2|\,dt + \int_1^0 f(tw_1+w_2)\,|w_1|\,dt + \int_1^0 f(tw_2)\,|w_2|\,dt$$

$$= |w_1|\left(\int_0^1 f(tw_1)\,dt - \int_0^1 \underbrace{f(tw_1+w_2)}_{=f(tw_1)}\,dt\right) + |w_2|\left(\int_0^1 \underbrace{f(tw_2+w_1)}_{=f(tw_2)}\,dt - \int_0^1 f(tw_2)\,dt\right)$$

$$\overset{\text{elliptisch}}{=} 0$$

(da Kurvenintegral invariant unter Parametrisierungswechsel, darf bel. parametrisiert werden)

Also folgt die Behauptung.

$\square$

(c) Seien wie in (b) die paarw. versch. PS $z_1, \dots, z_k$. Z.z. $f': \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_k\} =: D$ elliptisch

Dazu ex., da alle Pole von f isoliert, für $z \in D$ ein $r > 0$, s.d. f auf $U_{2r}(z)$ holomorph.

$$f'(z) \overset{\text{CIF}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(z)}{(w-z)^2}\,dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(z+w_1)}{(w-z)^2}\,dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-(z+w_1)|} \frac{f(z+w_1)}{(w-w_1-z)^2}\,dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-(z+w_1)|} \frac{f(z+w_1)}{(w-(z+w_1))^2}\,dw$$

$$\overset{\text{CIF}}{=} f'(z+w_1)$$

analog: $f'(z) = f'(z+w_2)$. Also f' elliptisch auf D, insbes. auf ∂F.

Nun argumentiere analog zu (b) unter Benutzung, dass nach VL gilt: $\operatorname{res}_z \frac{f'}{f} = 0\text{-ord}(f,z) - \infty\text{-ord}(f,z)$ und dass f auf ∂F weder PS noch NS, also auch f' keine PS und $\frac{f'}{f}$ auf ∂F holomorph.

$\square$

(sehe hier nicht, wie man elegant das Ergebnis der (b) verwendet ohne sich über Ableitung meromorpher Funktionen Gedanken zu machen)

A3) $f(z) = \dfrac{z}{z^4+10z^2+9}$. Es ist $z^4+10z^2+9 = (z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)$. Also alles einfache Pole. Es gilt:

$$\operatorname{res}_i f = \lim_{z\to i} (z-i)\,f(z) = \frac{i}{(2i)(-2i)(4i)} = \frac{1}{16}$$

$$\operatorname{res}_{-i} f = \lim_{z\to -i} (z+i)\,f(z) = \frac{-i}{(-2i)(-4i)(2i)} = \frac{1}{16}$$

$$\operatorname{res}_{3i} f = \lim_{z\to 3i} (z-3i)\,f(z) = \frac{3i}{(2i)(4i)(6i)} = -\frac{1}{16}$$

$$\operatorname{res}_{-3i} f = \lim_{z\to -3i} (z+3i)\,f(z) = \frac{-3i}{(-4i)(-2i)(-6i)} = -\frac{1}{16}$$

(a) Es ist $\mathrm{Bild}(\gamma) \cap \{\pm i, \pm 3i\} = \emptyset$ und nach VL $\chi(\gamma, \pm i) = 1$ und $\chi(\gamma, \pm 3i) = 0$

Also liefert Residuensatz:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \left[\operatorname{res}_i f + \operatorname{res}_{-i} f\right] 2\pi i = \frac{2\pi i}{8} = \frac{\pi i}{4}$$

(b) Es ist $\deg(z^4 + 10z^2 + 9) = 4 \geq 3 = \deg(z) + 2$ und $z^4 + 10z^2 + 9 \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$. Also gilt nach VL:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \left[\operatorname{res}_i f + \operatorname{res}_{3i} f\right] = 2\pi i \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right] = 0$$

(c)

$$\int \frac{1}{2 + \cos^2 t}\,dt$$

Also $R(x,y) = \dfrac{1}{2+x^2}$, $2 + x^2$ hat keine reellen NS. Betrachte

$$f(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{z} \frac{1}{2 + \frac{1}{4}\left(z + \frac{1}{z}\right)^2}$$

$$2 + \frac{1}{4}\left(z + \frac{1}{z}\right)^2$$

$$-2 = \frac{1}{4}\left(z + \frac{1}{z}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow -8 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2$$

$$= \frac{1}{z} \frac{1}{2 + \frac{1}{4}\left(z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}\right)}$$

$$= \frac{z}{2z^2 + \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{4z}{8z^2 + z^4 + 2z^2 + 1}$$

$$= \frac{4z}{z^4 + 10z^2 + 1}$$

hat sich da jemand beim Konzipieren der Aufgabe verrechnet? ̈⌒

Die einfachen Pole von f liegen bei $z_{1/2} = \pm\left(i\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)$, $z_{3/4} = \pm\left(i\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)$.

Dabei ist $|z_{3/4}| > 1$ also $\operatorname{res}_{z_1} f = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$, $\operatorname{res}_{z_2} f = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$ insgesamt folgt nach VL

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos^2(t)}\,dt = 2\pi \left[\frac{1}{2\sqrt{6}} + \frac{1}{2\sqrt{6}}\right] = \frac{2}{\sqrt{6}}\pi = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\pi.$$