Funktheo

Christian Merker, Julia Filo

| A1 | A2 | A3 | Σ |
|---|---|---|---|
| | | | |

**A1** (i) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots$ also $\frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} - \dots$ also $\operatorname{res}_0 f = 0$.

(ii) $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$ also Pol 2. Ordnung in $z=1$, es gilt nach VL

$$\operatorname{res}_1 f = \frac{(e^z)'(1)}{(2-1)!} = e$$

(iii) $f(z) = \frac{1}{e^z+1}$ $\quad e^z+1=0 \iff e^z=-1 \iff e^{\pi i}e^z = 1 \iff e^{z+\pi i} = 1 \iff z+\pi i = 2\pi i k$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Es gilt $0\text{-ord}_{z_0 = 2\pi i k + \pi i}(e^z+1) = 1$, denn $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{z_0}}{n!}(z-z_0)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!}$ also $e^z+1 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!}$.

Da $0\text{-ord}(1) = 0$ folgt $\infty\text{-ord}(f) = 1-0 = 1$ also $f$ hat in $z_0$ einen einfachen Pol. Es folgt

$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{e^z+1}$. Da nun $0\text{-ord}_{z_0}(z-z_0) = 1$ hat $\frac{z-z_0}{e^z+1}$ in $z_0$ eine hebbare Singularität,

es folgt mit de l'Hospital $\operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) \overset{\text{Hosp.}}{=} \lim_{z\to z_0} \frac{1}{e^z} = -1$.

(iv) $z\exp\left(\frac{1}{1-z}\right) = z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(z-1)^n}[z-1+1] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left[(z-1)^{-n+1} + (z-1)^{-n}\right]$

$\overset{\text{absolute Konvergenz von } \exp(\cdot)}{=} z-1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right](z-1)^{-n}$

Also folgt $\operatorname{res}_{z=1} f = a_{-1} = -\frac{1}{2}$

**A2** <u>Bew.</u> $\frac{f'}{f}$ ist holomorph auf $D \setminus \{s_1, ..., s_d\}$ also auch $\frac{f'}{f} g$. Der Residuensatz liefert

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} g(z) dz = \sum_{i=1}^{d} \chi(\gamma, s_i) \operatorname{res}_{s_i} \frac{f'}{f} g.$$

Es g.z.z dass $\operatorname{res}_s \frac{f'}{f} g = [0\text{-ord}(f,s) - \infty\text{-ord}(f,s)]\, g(s) = m\, g(s)$ für $s \in \{s_1, .., s_d\}$.

Analog zum Beweis in der VL erhalten wir für ein $R>0$ ein $h: \dot{U}_R(s) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $h(s) \neq 0$ und
$f(z) = (z-z_0)^m h(z) \quad \forall z \in \dot{U}_R(s)$.

Also folgt analog $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}$ für $|z-s|$ hinreichend klein.

Es ist $h$ holom. also auch $\frac{h'}{h}$ und $\frac{g(z)m}{z-z_0}$ hat einen einfachen Pol bei $z=z_0$, also

$$\operatorname{res}_s \frac{f'}{f} g = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) \frac{g(z)m}{z-z_0} = g(s)m.$$

$\square$

**A3** <u>Bew.</u> $p$ ist auf $\mathbb{C}$ holomorph und $\mathbb{C}$ Stern- insbes. Elementargebiet. Außerdem setze $q(z) := z^5 + 7z$.
$q$ ebenfalls auf $\mathbb{C}$ holom. Nun ist: $|z^5 + 7z| = |z|\,|z^4 + 7| \geq |z|\,\big|\,|z|^4 - 7\big|$ also mit $|z| = 2$ folgt $|z^5 + 7z| \geq 2\,|16 - 7| = 2 \cdot 9 = 18 > 3 = |p(z) - q(z)|$. Da außerdem die Polynome $p, q$ auf $\mathbb{C}$ genau 5 NS haben, insbes. endlich viele, wendet Rouché auf $\gamma(t) = 2e^{2\pi i t}$ an und liefert dass $p, q$ gleich viele NS auf $|z| < 2$ haben. Für $|z| = 1$ ist analog $|z^5 + 7z| \overset{(*)}{\geq} |1-7| = 6 > 3$ also wendet Rouché auch auf $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ an und $p$ und $q$ haben auch gleich viele NS auf $|z| < 1$.
Da $q(z) = z(z^4 + 7)$ hat $q$ genau eine NS mit $|z| = 0$ und 4 NS mit $|z| = \sqrt[4]{7}$.
Da $1 = \sqrt[4]{1} < \sqrt[4]{7} < 2 = \sqrt[4]{16}$ hat $q$ also genau 4 NS in $1 < |z| < 2$.
Da die Abschätzung (*) auch gilt für $1+\varepsilon$ mit $\varepsilon$ hinreichend klein, liegen tatsächlich genau 4 NS von $p$ in $1 < |z| < 2$.
Nun wende A2 auf $f = p$ und $g = z$ an. Die Vorr. sind offensichtlich erfüllt, also folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z p'(z)}{p(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z(5z^4 + 7)}{z^5 + 7z + 3} dz = (0\text{-ord}_{z_1} p - \infty\text{-ord}_{z_1} p) \cdot z_1.$$

Es ist $p$ holomorph auf $\mathbb{C}$ also $\infty\text{-ord}_{z_1} p = 0$. Da außerdem $z_1$ einfache NS folgt $0\text{-ord}_{z_1} p = 1$ also die Beh.

$\square$

(Also es gab definitiv schon schönere Zettel dieses Semester ...)