Funktheo Blatt 13 Christian Merten, Julia Fila

A1	A2	A3	Σ

A1) (a) (i) Nein, denn $\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\, dz \neq 0$ und $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C}^\times$ holom.

(ii) Nein, denn $\forall \varepsilon > 0: \mathbb{R} \cap U_\varepsilon(0) \neq \emptyset$ also $(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}) \cup \{0\}$ nicht offen.

(iii) $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ konvex, also Sterngebiet und $\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ analog. Außerdem ist der Schnitt nichtleer, enthält also insbes. einen Sternmittelpunkt, also Vereinigung nach Blatt 5 ebenfalls Sterngebiet.

(b) „⇐" Liouville. „⇒" Sei nun $D \subsetneq \mathbb{C}$ Elementargebiet. Dann ist D biholomorph äquivalent zu $\mathbb{E}$. Sei $f: \mathbb{E} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z$ und $\varphi: D \to \mathbb{E}$ biholomorph. Dann ist $f\circ\varphi$ beschränkt, da f beschränkt. Ang. $f\circ\varphi$ konstant, dann ist f konstant oder φ. Da f nicht konstant, wäre φ konstant, aber φ surj. und $\#\mathbb{E} > 1$ ↯. □

A2) (a) Für $z = a+bi \in G$ ist $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Falls $b\neq 0$ ist $z^2 \in \mathbb{C}_-$ und falls $b=0$ ist $\mathrm{Re}(z^2) = a^2 > 0$ wegen $z\in G$. Also auch dann $z \in \mathbb{C}_-$.

Sei umgekehrt $w = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_-$ bel. Dann sind $\alpha = \sqrt{r}\,e^{i\varphi/2}$ und $\beta = \sqrt{r}\,e^{i(\varphi/2+\pi)}$ Lösungen von $T^2 - w = 0$. Über dem nullteilerfreien Ring $\mathbb{C}$ sind das bereits alle Lösungen.

Da $w \in \mathbb{C}_-$ ist $r \neq 0$ also $\alpha \neq 0 \neq \beta$. Außerdem ist $\varphi \notin \pi\mathbb{Z}$, denn sonst wäre $w = re^{i\pi} = -r \notin \mathbb{C}_-$.

Also ist entweder $\mathrm{Re}(\alpha) = \cos \varphi/2 > 0$ oder $\mathrm{Re}(\beta) = \cos(\varphi/2+\pi) > 0$, also entweder $\alpha\in G$ oder $\beta \in G$.

Das zeigt Surj. und Injektivität. Außerdem ist g holomorph, also biholomorph.

(b) $D := \{z\in\mathbb{C} \mid |z| > 1\}$. Ang. es ex. $\varphi: \mathbb{C}^\times \to D$ biholomorph. Dann setze $h: D \to \mathbb{E},\ z \mapsto \frac{1}{z}$.

Dies ist wohldef., da für $z\in D$ ist $|z|>1$. Also ist $h\circ\varphi: \mathbb{C}^\times \to \mathbb{E}$ holomorph und beschränkt.

Beh. Jede holomorphe beschränkte Funktion $f: \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ ist konstant.

denn: $z_0 = 0$ ist eine isolierte Singularität von f. Da f beschränkt ist z_0 weder ein Pol (sonst wäre $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$) noch wesentlich (sonst wäre f nach Casorati Weierstraß unbeschränkt).

Also $z_0 = 0$ hebbar. Wir erhalten eine beschränkte holom. Fkt: $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, die nach Liouville konstant ist. #

Also ist $h\circ\varphi$ konstant. Da h nicht konstant, folgt φ konstant, aber $\#D > 1$ also φ nicht surj. ↯

(c) Es ist $\emptyset \subsetneq \mathbb{C}_- \subsetneq \mathbb{C}$ Elementargebiet also $\mathbb{C}_-$ bihol. äquiv. zu $\mathbb{E}$. Also ex. ein $\varphi: \mathbb{C}_- \to \mathbb{E}$ biholomorph.

Also ist die ganze Funktion $\varphi\circ f$ beschränkt, also nach Liouville konstant. Da φ surj. und $\#\mathbb{E}>1$ ist φ nicht konstant, also f. □

A3 Seien $S_f, S_g \subseteq \mathbb{C}$ die NS von f bzw. g. Nach Vorr ist $S_f \cap S_g = \emptyset$. Falls $f \equiv 0$ oder $g \equiv 0$:

OE $f \equiv 0$, dann ist $S_f = \mathbb{C}$ also $S_g = \emptyset$. Dann setze $B := \frac{1}{g}$ ganz und $A = 0$.

Sei also im Folgenden $f, g \not\equiv 0$. Auf dem Gebiet $\mathbb{C}$ sind dann S_f, S_g isoliert, insbes. abgeschl.

Dann setze $U_1 := \mathbb{C} \setminus S_f$, $U_2 := \mathbb{C} \setminus S_g$. Diese sind offen und $\mathbb{C} = U_1 \cup U_2$.

Setze weiter $f_1 := \frac{1}{fg}$ und $f_2 := 0$. Dann ist $f_1 - f_2 = \frac{1}{fg}$ holomorph auf $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C} \setminus \{S_f, S_g\}$

und f_1 meromorph da f_1 nur isolierte Pole hat und sonst holomorph ist.

Also ist $\{f_1, f_2\}$ eine ML-Verteilung. Nach VL ex. eine merom. Fkt. $M: \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ mit

$M - \frac{1}{fg}$ holomorph auf $U_1 = \mathbb{C} \setminus S_f$ und M holom. auf $U_2 = \mathbb{C} \setminus S_g$. Insbes.

ist für $z \in S_f$ M in z holomorph, da $S_f \subseteq U_2$. Also $\underbrace{\left(M - \frac{1}{fg}\right)}_{\in \mathcal{O}(U_1)} \underbrace{f}_{\in \mathcal{O}(U_1)} = \underbrace{Mf}_{\in \mathcal{O}(U_2)} - \underbrace{\frac{1}{g}}_{\in \mathcal{O}(U_2)}$ ganz.

Also ist $\underbrace{\left(M - \frac{1}{fg}\right) f g}_{\in \mathcal{O}(U_1)} \underbrace{\frac{1}{f}}_{\in \mathcal{O}(U_1)} = Mg - \frac{1}{f} =: \psi \in \mathcal{O}(U_1)$. Also folgt $Mg = \underbrace{\psi}_{\in \mathcal{O}(U_1)} + \underbrace{\frac{1}{f}}_{\in \mathcal{O}(U_1)} \in \mathcal{O}(U_1)$.

Also insgesamt Mg ganz da $U_1 \cup U_2 = \mathbb{C}$.

Setze $A := Mg$, $B := -\left(M - \frac{1}{fg}\right) f = \left(\frac{1}{fg} - M\right) f$. Diese sind nun ganz und es gilt:

$$Af + Bg = (Mg) f + \left(\frac{1}{fg} - M\right) f g = Mgf + 1 - Mfg = 1$$

$\square$