VL 17 und 18

<u>Separation der Variablen</u> Betrachte Gleichungen der Form

$\frac{dy}{dx} = y' = f(x)\, g(y)$ bzw AWP $\begin{cases} y' = f(x)\, g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Dann Lösungsansatz $\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx$

Genauer: $f: I \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$, $g: J \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$ $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $x_0 \in I$, $y_0 \in J$

Falls: $g(y_0) = 0 \Rightarrow \varphi(x) := y_0$ Lösung

Sonst falls $g(y) \neq 0 \ \forall y \in J$, dann setze

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \quad , \quad G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\, dt$$

Falls $\exists$ Intervall $I_0 \subseteq I$ mit $x_0 \in I_0$ und $F(I_0) \subseteq G(J)$ so $\exists!$ Lösung

des AWP $\varphi: I_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$G(\varphi(x)) = F(x) \qquad \forall x \in I_0.$$

<u>Picard Lindelöf</u>: $D = I \times \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f: D \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^n$

AWP $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

- f genügt einer Lipschitz-bed. $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists L \geq 0$ s.d. $|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leq L\, |y - \bar{y}|$ $\forall (x,y), (x,\bar{y}) \in D$

  — " — lokalen Lipschitz-bed $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x_0 \in D$ $\exists$ $x_0 \in U \subseteq D$ Umgebung mit $f|_U$ Lipschitz.

$\rightarrow$ f bezügl. $y_1, \dots, y_n$ stetig part diff'bar $\Rightarrow$ f genügt lokal Lipschitz-bed

<u>Picard-Lindelöf</u>: Falls f einer lokalen Lipschitz-bed. genügt, gibt es zu $(x_0, y_0) \in D$

ein $\varepsilon > 0$ und eine Lösung $\varphi: [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des AWP $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

A1 $(1+x^2)y' + xy - xy^2 = 0$

(a) $z = \frac{1}{y} \quad z' = -\frac{1}{y^2}y' \quad \Rightarrow \quad y' = -y^2 z' = -\frac{z'}{z^2}$

$$\Rightarrow -(1+x^2)\frac{z'}{z^2} + \frac{x}{z} - \frac{x}{z^2} = 0$$

(b) $\frac{-(1+x^2)z' + zx - x}{z^2} = 0 \overset{\neq 0}{\Leftrightarrow} -(1+x^2)z' + zx - x = 0 \overset{\neq 0}{\Leftrightarrow} z' = (z-1)\frac{x}{1+x^2}$

Separation der Variablen:

$$\int \frac{1}{z-1}\,dz = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx + \tilde{C}$$

$$\Rightarrow \log(z-1) = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \tilde{C}$$

$$\Rightarrow z - 1 = \exp\left(\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right)\underbrace{e^{\tilde{C}}}_{=:C} = C\exp\left(\log(x^2+1)\right)^{1/2} = C\sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow z = C\sqrt{x^2+1} + 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{z} = \frac{1}{C\sqrt{x^2+1}+1}$$

(c) Verifizieren durch Nachrechnen

A2 (a) Es ist $GL_n(\mathbb{R})$ offene TM von $M(n\times n, \mathbb{R})$ also n^2-dim Umgfkt

(b) $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Es ist $\dim_{\mathbb{R}}[T_A GL_n(\mathbb{R})] = n^2$ also $T_A GL_n(\mathbb{R}) = M(n\times n, \mathbb{R})$.

(c) Nach Leibnizformel ist die Determinante ein Polynom aus den Matrixeinträgen, also C^∞.

$$D_{\hat{A}}\det(\mathbb{1}) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\det(\mathbb{1} + t\hat{A}) - \det(\mathbb{1})\right] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\quad t\,\mathrm{Spur}(\hat{A}) + o(t)\right]$$

$$= \mathrm{Spur}(\hat{A})$$

(d) $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}((-\infty,0)) \cup \det^{-1}((0,\infty))$.