Beispiel 0.1.

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

auf $I = [0,1]$ ist $f(x)$ R.-integrierbar. Auf I hat $f(x)$ eine Unstetigkeit bei $x = 0$.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann $\exists \delta \in [0,1]$, s.d.

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \cdot \delta < \frac{1}{4}\epsilon.$$

Auf $[\delta, 1] f(x)$ stetig und R.-integrierbar. Dann ex. eine Zerlegung $Z_\delta \in \mathcal{Z}(\delta, 1)$, s.d.

$$|\overline{S}_{Z_\delta}(f) - \underline{S}_{Z_\delta}(f)| < \frac{1}{2}\epsilon.$$

Ergänze Z_δ um das Intervall $[0,\delta] \implies Z \in \mathcal{Z}(0,1)$. Und es gilt

$$|\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| \leq |\overline{S}_{Z_\delta}(f) - \underline{S}_{Z_\delta}(f)| + 2 \sup_{x\in[0,\delta]} |f(x)| \cdot \delta < \epsilon.$$

Satz 0.2 (Linearität)**.** Seien $f, g\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}$ (beschränkt) R.-integrierbar. Dann ist $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ über I R.-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Es ex. $RS_Z(f)$ und $RS_Z(g)$ s.d.

$$\lim_{h\to 0} RS_Z(f) = \int_a^b f(x)dx$$
$$\lim_{h\to 0} RS_Z(g) = \int_a^b g(x)dx.$$

o.B.d.A. Z und ξ_k sind gleich für f und g. Damit folgt

$$RS_Z(\alpha f + \alpha g) := RS_Z(\alpha f) + RS_Z(\beta g) = \alpha RS_Z(f) + \beta RS_Z(g)$$

$$\begin{aligned} \implies \quad \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx &= \alpha \lim_{h\to 0} RS_Z(f) + \beta \lim_{h\to 0} RS_Z(g) \\ &= \lim_{h\to 0} (\alpha \cdot RS_Z(f)) + \lim_{h\to 0} (\beta \cdot RS_Z(g)) \\ &= \lim_{h\to 0} RS_Z(\alpha f) + \lim_{h\to 0} RS_Z(\beta g) \\ &= \lim_{h\to 0} RS_Z(\alpha f + \beta g) \\ &= \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx \end{aligned}$$

.

□

Satz 0.3 (Monotonie des Riemann-Integrals)**.** Seien $f, g\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}$ (beschränkte) R.-integrierbare Funktionen mit $g(x) \geq f(x)\ \forall x \in [a,b]$. Dann gilt

$$\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis. Es gilt für Zerlegung Z und $\xi_k \in I_k$:

$$RS_Z(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = RS_Z(g).$$

Für $h \to 0$ folgt die Behauptung. □

Korrolar 0.4. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ (beschr.) R.-integrierbare Funktion, $m \leq f(x) \leq M$. Dann gilt

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Beweis. $g \equiv 1 \implies \int_a^b 1dx = (b-a)$ Damit folgt

$$m(b-a) = \int_a^b m \cdot dx \overset{\text{Satz 0.3}}{\leq} \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx = M(b-a).$$

□

Korrolar 0.5. Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei beschr. R.-integrierbare Funktionen. Dann gilt

(a) $f_+ := \max\{f, 0\}$ und $f_- := \min\{f, 0\}$ sind R.-integrierbar

(b) $|f|$ ist R.-integrierbar und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

(c) $\forall p \in [1, \infty)$ ist $|f|^p$ R.-integrierbar

(d) $f \cdot g$ ist R.-integrierbar.

Beweis. (a) $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$.

$$0 \leq \overline{S}_Z(f_+) - \underline{S}_Z(f_+) \leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)$$
$$0 \leq \overline{S}_Z(f_-) - \underline{S}_Z(f_-) \leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f).$$

Falls $|\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| \xrightarrow{h \to 0} 0 \implies |\overline{S}_Z(f_\pm) - \underline{S}_Z(f_\pm)| \xrightarrow{h \to 0} 0 \implies$ Beh.

(b) $|f| = f_+ - f_- \overset{\text{Linearität}}{\implies} |f|$ R.-integrierbar. $f \leq |f|, -f \leq |f| \overset{\text{Monotonie}}{\implies} \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \implies \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

(c) Sei $M = \sup_{x \in [a,b]} |f| \overset{\text{linear}}{\implies} \frac{|f|}{M}$ integrierbar. $0 \leq \frac{|f|}{M} \leq 1 \implies$ z.Zg.: $|f|^p$ integr. für $0 \leq f \leq 1$.
Sei $0 \leq x \leq y \leq 1$. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt

$$\begin{aligned} & y^p - x^p = p \cdot \xi^{p-1}(y-x) \\ \implies & |y|^p - |x|^p = p \cdot |\xi|^{p-1}(|y| - |x|) \leq p\left(|y| - |x|\right). \end{aligned}$$

Für $Z \in \mathcal{Z}(0,1)$ gilt

$$\underbrace{\overline{S}_Z(|f|^p) - \underline{S}_Z(|f|^p)}_{\xrightarrow{h \to 0} 0} \leq p\,\underbrace{\left(\overline{S}_Z(|f|) - \underline{S}_Z(|f|)\right)}_{\Leftarrow \xrightarrow{h \to 0} 0}.$$

(d) $f \cdot g = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$ und c).

□

Bemerkung 0.6. Im Allgemeinen ist

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \neq \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right).$$

Korrolar 0.7 (Definitheit des R.-Integrals)**.** Sei $f\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \implies f \equiv 0.$$

Beweis. durch Kontraposition. Sei $f \not\equiv 0$, d.h. $\exists x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) > 0. \overset{f \text{ stetig}}{\implies} \exists I_\epsilon := [x_0, x_0 + \epsilon]$ oder $I_\epsilon := [x_0 - \epsilon, x_0]$, s.d. $f(x) \geq \delta > 0\ \forall x \in I_\epsilon$.

Sei $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit h klein genug, s.d. für ein k $I_k \subset I_\epsilon$. Dann gilt

$$0 < \delta(x_k - x_{k-1}) \leq \inf_{x \in I_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) \leq \underline{S}_Z(f) \leq \int_a^b f(x)dx.$$

□

Definition 0.8. Sei $a \leq b$ Dann ist

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$$
$$\int_a^a f(x)dx := 0.$$

Satz 0.9 (1. Mittelwertsatz)**.** Sei $f\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $g\colon I \to \mathbb{R}$ R.-integrierbar. g habe in I keinen Vorzeichenwechsel. Dann $\exists \xi \in [a,b]$ s.d. gilt

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Sei $g \geq 0$ (o.B.d.A.). f stetig $\implies$ $\exists m = \min_{x \in I} f(x)$, $M = \max_{x \in I} f(x)$. Dann folgt

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

Betrachte $\varphi(t) := (m(1-t) + M \cdot t)\int_a^b g(x)dx$, $t \in [0,1]$. Nach ZWS $\exists \theta \in [0,1]$, s.d.

$$\begin{aligned}
\varphi(\theta) &= y = (m(1-\theta) + M \cdot \theta)\int_a^b g(x)dx \\
\varphi(0) &\leq y \leq \varphi(1) \\
m\int_a^b g(x)dx &\leq y \leq M\int_a^b g(x)dx \\
\implies \int_a^b f(x)g(x)dx &= \mu\int_a^b g(x)dx.
\end{aligned}$$

Nach dem ZWS für f $\exists \xi \in [a,b]$, s.d. $f(\xi) = \mu \in [m,M]$. □

Korrolar 0.10. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig.

1. $\exists \xi \in I$, s.d. $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$
2. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $m \leq f(x) \leq M$. $x \in I$. Sei $g\colon I \to \mathbb{R}$ R.-integrierbar mit $g \geq 0$. Dann gilt
$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

Bemerkung 0.11. Voraussetzungen sind unverzichtbar!

Stetigkeit: $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ unstetig.

$$f(\xi)(b-a) = f(\xi) \cdot 2 = \begin{cases} 0 & 0 \leq \xi < 1 \\ 2 & 1 \leq \xi \leq 2 \end{cases} \neq 1 = \int_0^2 f(x)dx.$$

Positivität: $f(x) = x$, $g(x) = \begin{cases} -1 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$.

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 (-x)dx + \int_1^2 xdx = -\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

aber

$$\xi \cdot \int_0^2 g(x)dx = \xi \cdot 0 = 0 \quad \forall \xi \in [0,2].$$

0.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 0.12 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** Es sei $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

(a) Die Funktion $F_0\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $F_0(x) := \int_a^x f(t)dt$ ist stetig differenzierbar auf $[a,b]$ und

$$F_0'(x) = f(x) \quad x \in [a,b] \quad (*).$$

Jede Funktion $F \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ welche $(*)$ erfüllt, heißt Stammfunktion von f.

(b) Jede Stammfunktion F von f hat die Form

$$F(x) = C + \int_a^x f(t)dt = C + F_0(x).$$

(c) Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \text{ d.h. insb. } \int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a) \quad \forall F \in C^1([a,b],\mathbb{R}).$$

Beweis. (a) Für $h \neq 0$, $x \in [a,b]$

$$\frac{F_0(x+h) - F_0(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \overset{1.\text{ MWS}}{=} \frac{1}{h} f(\xi_h) \cdot h \xrightarrow[h\to 0]{f \text{ stetig}} f(x)$$

$$\implies F_0'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F_0(x+h) - F_0(x)}{h} = f(x).$$

(b) Sei F eine Stammfunktion ovn f, dann gilt $(F - F_0)' = f - f = 0 \overset{\text{MWS Diff}}{\implies} F - F_0 \equiv \text{konstant} = C \implies F = F_0 + C$ für ein $C \in \mathbb{R}$.

(c) $F(b) - F(a) \overset{\text{(b)}}{=} F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f(t)dt$

□

Bemerkung 0.13. 1. $F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b \implies \int_a^b F'(t)dt = F(x)\Big|_a^b$.

Man bezeichnet eine Stammfunktion auch als unbestimmtes Integral

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

(math. nicht korrekte Bezeichnung)