

A1 | Bew., Sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$  und  $f(i\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ . Dann ist nach einem alten Blatt  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$  für geeignete  $a_n \in \mathbb{C}$ . Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt dann  $f(x) = \overline{f(x)}$ , also

$$\sum_{n \geq 0} \overline{a_n} x^n \stackrel{!}{=} \sum_{x \in \mathbb{R}} \overline{a_n (x^n)} = \overline{\sum_{n \geq 0} a_n x^n} = \overline{f(x)} = f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Da  $\mathbb{R}$  einen Häufungspunkt enthält, folgt mit Identitätssatz für Potenzreihen, dass  $\overline{a_n} = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  also  $a_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Sei nun  $y \in \mathbb{R}$  bel. Dann gilt

$$f(iy) = \sum_{n \geq 0} a_n (iy)^n$$

$$i^n = \begin{cases} i & n \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & n \equiv 2 \pmod{4} \\ -i & n \equiv 3 \pmod{4} \\ 1 & n \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$$

$$= \sum_{n \geq 0} a_n i^n y^n \in \mathbb{R}$$

$$= \sum_{n \geq 0} (a_{4n} i^{4n} y^{4n} + a_{4n+1} i^{4n+1} y^{4n+1} + a_{4n+2} i^{4n+2} y^{4n+2} + a_{4n+3} i^{4n+3} y^{4n+3})$$

$$= \sum_{n \geq 0} a_{4n} y^{4n} + i \sum_{n \geq 0} a_{4n+1} y^{4n+1} - \sum_{n \geq 0} a_{4n+2} y^{4n+2} - i \sum_{n \geq 0} a_{4n+3} y^{4n+3}$$

$$\text{Da } f(iy), a_n, y \in \mathbb{R} \text{ folgt } \sum_{n \geq 0} a_{4n+1} y^{4n+1} - \sum_{n \geq 0} a_{4n+3} y^{4n+3} = 0$$

$$\text{also folgt } \sum_{n \geq 0} a_n (iy)^n = \sum_{n \geq 0} (a_{4n} y^{4n} - a_{4n+2} y^{4n+2}) = \sum_{n \geq 0} a_{2n} (iy)^{2n}$$

Da  $i\mathbb{R}$  einen HP enthält folgt erneut mit Identitätssatz  $a_{2n+1} = 0 \quad \forall n \geq 0$ . Also

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_{2n} z^{2n} = \sum_{n \geq 0} a_{2n} (-z)^{2n} = f(-z).$$

□

(Genügt als Voraussetzung nicht bereits, dass eine bel. kleine in  $\mathbb{R}$  (bzw.  $i\mathbb{R}$ ) offene Umgebung  $U$  ex. mit  $f(U) \subseteq \mathbb{R}$ ?)

A2)  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $(f_n)_{n \geq 0} : D \rightarrow \mathbb{C}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$

(a) Beh.  $(f_n)_{n \geq 0} \xrightarrow{\text{kompakt}} f \iff (f_n) \xrightarrow{\text{pktw.}} f$

Bew.  $\Rightarrow$  Für  $z \in D$  ist  $\{z\}$  beschr. und abgeschl., also kompakt. Daraus folgt die Beh.

(b) Beh.  $f_n \xrightarrow{\text{lo-p.}} f \iff f_n \xrightarrow{\text{total glm}} f$

Bew.  $\Rightarrow$  Da  $D$  offen ex.  $\forall z \in D \exists \varepsilon > 0$  sd.  $\overline{U_\varepsilon(z)} \in D$ . Da  $\overline{U_\varepsilon(z)}$  kompakt und  $U_\varepsilon(z) \subseteq \overline{U_\varepsilon(z)}$  folgt die Beh.

$\Leftarrow$  Sei  $K \subseteq D$  kompakt. Dann ex.  $\forall a \in K$  ein  $U_a \in D$  offen mit  $a \in U_a$  und

$f_n|_{U_a} \xrightarrow{\text{glm.}} f|_{U_a}$ . Dann gilt außerdem  $K \subseteq \bigcup_{a \in K} U_a$ . Da  $K$  kompakt,

ex.  $a_1, \dots, a_n$  sd.  $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{a_i}$ . Sei nun  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt

$\forall i=1, \dots, n \exists n_i \in \mathbb{N}$  sd.  $\forall n \geq n_i$  und  $z \in U_{a_i} : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ .

Setze nun  $n_0 := \max_{i=1, \dots, n} n_i$ . Dann gilt für  $z \in K$  bel.:  $\exists i \in \{1, \dots, n\}$  sd.  $z \in U_{a_i}$  und  $\forall n \geq n_0$  ist insbes.  $n \geq n_i$  also  $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ . □

(c) Beh.  $\sum_{n \geq 0} f_n$  konv. normal  $\iff \forall z_0 \in D \exists U \subseteq D$  offen mit  $z_0 \in U$  und  $(M_n)_{n \geq 0}$  in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  s.d.  $\sum_{n \geq 0} M_n$  konv. und  $\sup_{z \in U} |f_n(z)| \leq M_n \forall n \geq 0$ .

Bew.  $\Rightarrow$  selbes Argument wie bei (b)  $\Leftarrow$ .

$\Leftarrow$  Sei  $K \subseteq D$  kompakt. Dann ex.  $\forall a \in K$  ein  $U_a \subseteq D$  offen mit  $a \in U_a$  und ein  $(M_{a,n})_{n \geq 0}$  in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $\sum_{n \geq 0} M_{a,n}$  konv. und  $\sup_{z \in U_a} |f_n(z)| \leq M_{a,n} \forall n \geq 0$ . Dann

ist  $K \subseteq \bigcup_{a \in K} U_a$ . Da  $K$  komp. ex.  $a_1, \dots, a_k$  sd.  $K \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_{a_i}$ . Dann setze

$M_n := \max_{i \in \{1, \dots, k\}} M_{a_i, n}$ . Dann ist  $M_n \leq \sum_{i=1}^k M_{a_i, n} \forall n \in \mathbb{N}$ . Da  $\sum_{n \geq 0} M_{a_i, n}$

konvergent und  $k$  endlich folgt  $\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{i=1}^k M_{a_i, n} \right)$  konvergent, insbes.  $\sum_{n \geq 0} M_n$  konvergent.

Außerdem gilt für  $z \in K$  bel., dass  $z \in U_{a_i}$  für ein  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Also

$|f_n(z)| \leq M_{a_i, n} \leq M_n \forall n \geq 0$ . Also insbes.  $\sup_{z \in K} |f_n(z)| \leq M_n \forall n \geq 0$ .

(d) Beh.  $\sum f_n$  konv. normal  $\rightarrow (\sum_{n=0}^N f_n)_{N \geq 0}$  konv. kompakt gegen  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ .

Bew. Sei  $K \subseteq \mathbb{D}$  kompakt. Dann ex. eine Folge  $(M_n)_{n \geq 0}$  in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  s.d.

$\sum_{n=0}^{\infty} M_n$  konv. und  $\sup_{z \in K} |f_n(z)| \leq M_n \quad \forall n \geq 0$ . Zunächst ist

$$\left| \sum_{n=0}^N f_n(z) \right| \leq \sum_{n=0}^N |f_n(z)| \leq \sum_{n=0}^N M_n \quad \forall z \in K. \text{ Also } \sum_{n=0}^{\infty} f_n : K \rightarrow \mathbb{C} \text{ wohldefiniert.}$$

Nun betrachte:  $\sup_{z \in K} \left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) - \sum_{n=0}^N f_n(z) \right| = \sup_{z \in K} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(z) \right|$

$$\leq \sup_{z \in K} \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(z)|$$

$$\leq \sup_{z \in K} \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} M_n - \sum_{n=0}^N M_n}_{\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0}$$

Also folgt  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  konv. glm. auf  $K$  gegen  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ .

□

A3/ (a) Beh.  $(f_n)_{n \geq 0}$  holomorph mit  $f_n \xrightarrow{\text{Komp.}} f: D \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow f_n' \xrightarrow{\text{Komp.}} f'$

Bew. Nach A2 b) genügt es lokale glm. Konv. zu zeigen. Dazu sei  $z_0 \in D$ . Da  $D$  offn.,  
 ex. ein  $r > 0$  sd.  $\overline{U_{2r}(z_0)} \subseteq D$ . Sei nun  $\varepsilon > 0$ . Es ist  $\overline{U_r(z_0)}$  kompakt, d.h.

es ex. ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  sd.  $\forall n \geq n_0: \sup_{w \in \overline{U_{2r}(z_0)}} |f_n(w) - f(w)| < r\varepsilon$ . Dann gilt  $\forall n \geq n_0$ :

$$\begin{aligned} \sup_{z \in U_r(z_0)} |f_n'(z) - f'(z)| &\stackrel{\text{CIF}}{=} \sup_{z \in U_r(z_0)} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in U_r(z_0)} \left| \int_{\gamma} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^2} dw \right| \end{aligned}$$

Für  $z \in U_r(z_0)$  und  $w \in \partial U_{2r}(z_0)$  ist  $|w-z| \geq r$  und  $|f_n(w) - f(w)| < r\varepsilon$ .

Mit  $\ell(\gamma) = 2\pi r$  folgt mit Standardabschätzung:

$$\sup_{z \in U_r(z_0)} |f_n'(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in U_r(z_0)} \frac{r\varepsilon}{r^2} \cdot 2\pi r = \varepsilon$$

□

(b) Bew. Es ist  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $F_N := \sum_{n=0}^N f_n(z)$  konv. kompakt nach A2 (d) gegen  $F$ .

Als endl. Summe holom. Fkt. ist  $F_N$  holomorph  $\forall N \geq 0$ . Dann liefert Weierstrass:

$F$  auf  $D$  holomorph und  $F_N' \xrightarrow{\text{Komp.}} F'$ . Es ist  $F_N'(z) = \sum_{n=0}^N f_n'(z)$

und  $F_N'$  konv. kompakt, also insbes. punktweise, also  $F_N'(z) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{n \geq 0} f_n'(z) \forall z \in D$ .

Da  $\mathbb{C}$  hausdorffsch sind Grenzw. eindeutig, also folgt  $F'(z) = \sum_{n \geq 0} f_n'(z)$ .

b.z.z.  $\sum_{n \geq 0} f_n'(z)$  konv. normal. Nach A2 (c) genügt es das lokal zu zeigen, d.h. sei  $z_0 \in D$

bel. und  $r > 0$  sd.  $\overline{U_{2r}(z_0)} \subseteq D$ . Es ist  $\overline{U_{2r}(z_0)}$  kompakt, d.h. es ex. eine Folge  $(M_n)_{n \geq 0}$  in  $\mathbb{R}_{>0}$

mit  $\sum_{n \geq 0} M_n$  konv. und  $\sup_{z \in \overline{U_{2r}(z_0)}} |f_n(z)| \leq M_n \forall n \geq 0$ . Dann analog zu (a) mit CIF:

$$\sup_{z \in U_r(z_0)} |f_n'(z)| = \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in U_r(z_0)} \left| \int_{\gamma} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2} dw \right| \stackrel{\text{Standard}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \frac{M_n}{r^2} \cdot 2\pi r = \frac{M_n}{r} \quad \forall n \geq 0.$$

Da  $\sum_{n \geq 0} M_n$  konv., konv. auch  $\sum_{n \geq 0} \frac{M_n}{r}$ , also konv.  $\sum_{n \geq 0} f_n'(z)$  normal.

□