Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 11 \\ -2 & 3 & -1 & -2 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A|b) = 4$ und $L = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A|b) = 3$ spezielle Lösung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, damit folgt $L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Lin}\left(\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Rg}(A) = 3 \neq 4 = \mathrm{Rg}(A|b) \implies L = \{\}$

Aufgabe 2. (a) Beh.: $x^2 + 1$ und $x^2 + x + 1$ sind teilerfremd.

Beweis. Führe den euklidischen Algorithmus mit $f_1 := x^2+x+1$ und $f_2 := x^2+1$ aus. So erhalten wir

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \cdot f_2 + \underbrace{x}_{=:f_3} \\ f_2 &= x \cdot f_3 + \underbrace{1}_{=:f_4} \\ f_3 &= x \cdot f_4. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir direkt $\mathrm{ggT}(f_1, f_2) = f_4 = 1 \implies f_1, f_2$ teilerfremd. □

(b) Beh.: Für $p := 1 + x$ und $q := -x$ gilt $p \cdot (x^2 + 1) + q \cdot (x^2 + x + 1) = 1$.

Beweis. Steige den euklidischen Algorithmus aus (a) auf.

$$\begin{aligned} 1 = f_4 = f_2 - x \cdot f_3 &= f_2 - x(f_1 - f_2) \\ &= f_2 - x \cdot f_1 + x \cdot f_2 \\ &= (\underbrace{-x}_{=q}) \cdot f_1 + (\underbrace{1+x}_{=p}) \cdot f_2. \end{aligned}$$

□

(c) Sei $f \in K[x]$ ein Polynom.
Beh.: $fK[x] := \{fg \mid g \in K[x]\}$ ist Untervektorraum von $K[x]$

Beweis. Seien $g_1, g_2 \in fK[x]$ und $\lambda \in K$ bel. Dann ex. Polynome $h_1, h_2 \in K[x]$ mit $g_1 = h_1 \cdot f$ und $g_2 = h_2 \cdot f$. Damit folgt

$$\lambda g_1 + g_2 = \lambda f h_1 + f h_2 = f(\underbrace{\lambda h_1 + h_2}_{\in K[x]}).$$

$\implies \lambda g_1 + g_2 \in fK[x]$.
Außerdem $0 \cdot f = 0 \in fK[x]$. □

(d) Beh.: $\dim K[x]/fK[x] = |\deg(f)|$.

Beweis. Für $f = 0$ folgt $fK[x] = \{0\}$ und wegen $K[x] \overset{\sim}{=} K[x]/\{0\}$, folgt direkt $\dim K[x] = \infty = |-\infty| = \deg(f)$.

Für $f \neq 0$ definiere $n := \deg(f) \geq 0$.

Zz.: Die auf $K[x]_{<n}$ eingeschränkte kanonische Projektion $p|_{K[x]_{<n}} \longrightarrow K[x]/fK[x]$ ist Isomorphismus.

$p \colon K[x] \to K[x]/fK[x]$ ist linear nach VL, damit auch $p|_{K[x]_{<n}}$.

Sei nun $h \in K[x]_{<n}$ mit $p(h) = 0 = fK[x]$. Dann ex. $g \in K[x]$, s.d. $h = fg$. Angenommen: $h \neq 0 \implies g \neq 0 \land f \neq 0$. Damit folgt

$$\deg(h) = \deg(f) + \deg(g) = n + \deg(g).$$

Wegen $\deg(g) \geq 0$ folgt damit $\deg(h) \geq n$. $\implies h \notin K[x]_{<n}$. Widerspruch.
$\implies \ker\ p|_{K[x]_{<n}} = \{0\}$.

Sei nun $A \in K[x]/fK[x]$. Dann ex. ein $g \in K[x]$ mit $A = g + fK[x]$. Teile nun g durch f mit Rest. Dann ex. $q, r \in K[x]$, s.d.

$$\begin{aligned} g &= q \cdot f + r \\ \implies g - r &= \underbrace{q \cdot f}_{\in fK[x]} \\ \implies g &\sim r. \end{aligned}$$

Dabei gilt nach VL $\deg(r) < \deg(f) = n \implies r \in K[x]_{<n}$.
$\implies p|_{K[x]_{<n}}(r) = r + fK[x] \overset{r \sim g}{=} g + fK[x] = A$.

Damit ist $p|_{K[x]_{<n}}$ bijektiv und damit Isomorphismus, da $K[x]_{<n}$ endlich dimensional folgt direkt

$$\dim K[x]/fK[x] = \dim K[x]_{<n} = n = |\deg(f)|.$$

□

Aufgabe 3. Sei $A \in M_{n,n}(K)$ und $\lambda \in K$.

(a) Beh.: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Beweis.

$$\begin{aligned} \det(\lambda A) &= \det(E_1(\lambda) \cdot \ldots \cdot E_n(\lambda) \cdot A) \\ &= \det(E_1(\lambda)) \cdot \ldots \cdot \det(E_n(\lambda)) \cdot \det(A) \\ &= \lambda^n \det(A). \end{aligned}$$

□

(b) Beh.: Ist $K = \mathbb{R}$, $n = 3$ und $A = -A^t$, dann ist A nicht invertierbar.

Beweis. Mit $A = (a_{ij})$ und $A = -A^t$ folgt für $i = j : a_{ii} = -a_{ii}$. Mit $\operatorname{char}(\mathbb{R}) = 0$ folgt $a_{ii} = 0$. Für $i \neq j$: folgt $a := a_{12} = -a_{21}$, $b := a_{23} = -a_{32}$ und $c := a_{13} = -a_{31}$. Damit folgt direkt

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & a & c \\ -a & 0 & b \\ -c & -b & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$\implies A$ nicht invertierbar. □

(c) Ja. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist antisymmetrisch, aber wegen $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ invertierbar.

(d) Ja. mit $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gilt für $A := \begin{pmatrix} \overline{1} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{1} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{1} \end{pmatrix}$

$$A + A^t = A + A \overset{\overline{1}+\overline{1}=0}{=} 0.$$

Aber $\det(A) = \overline{1} \cdot \overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1} \neq 0$.

Aufgabe 4. (a) Beh.: $\det(A) = (x + (n-1)y)(x-y)^{n-1}$.

Beweis.

$$\begin{vmatrix} x & y & y & \dots & y \\ y & x & y & \dots & y \\ y & y & x & \dots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \dots & x \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} x & y & y & \dots & y \\ y-x & x-y & 0 & \dots & 0 \\ y-x & 0 & x-y & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y-x & 0 & 0 & \dots & x-y \end{vmatrix}$$

$$\to \begin{vmatrix} x+(n-1)y & y & \dots & y & \\ 0 & x-y & 0 & \dots & y \\ 0 & 0 & x-y & \dots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-y \end{vmatrix} = (x+(n-1)y)(x-y)^{n-1}.$$

□

(b) Beh.: $\det(B) = (x^2 - y^2)^n$

Beweis. durch vollständige Induktion

I.A.: $n = 1 : B_2 = \begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 - y^2 = (x^2 - y^2)^1$

I.S.: $n - 1 \to n$. Die Beh. gelte bereits für bel. $n - 1 \in \mathbb{N}$.

Entwicklung der Determinante nach der ersten Spalte. Im folgenden bezeichnen b_{ij} Komponenten der Matrix B_n.

B_n ist von der Form:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \dots & y \\ 0 & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \dots & 0 \\ 0 & 0 & y & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{pmatrix}.$$

Das heißt $b_{11} = x$, $b_{(2n)1} = y$ und sonst $b_{i1} = 0$. Damit folgt (hier ist $B = B_n$):

$$\begin{aligned} |B_n| &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(B_{ij}) \\ &= x \cdot \det(B_{11}) - y \cdot \det(B_{(2n)1}). \end{aligned}$$

Für $B_{11} \in M_{(2n-1)\times(2n-1)}(K)$ bzw. $B_{(2n)1} \in M_{(2n-1)\times(2n-1)}(K)$ entwickle nach der letzten Spalte $j = 2n-1$. Hier ist jeweils nur in einer Zeile ein Eintrag ungleich Null: $b_{(2n)(2n)} = x$ bzw. $b_{1(2n)} = y$.
Die Matrizen $B_{11_{(2n-1)(2n-1)}}, B_{(2n)1_{1(2n-1)}} \in M_{2(n-1)\times 2(n-1)}(K)$ sind identisch und gleich B_{n-1}. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
|B_{11}| &= (-1)^{2n-1+2n-1} x \cdot \det(B_{11_{(2n-1)(2n-1)}}) \\
&= x \cdot \det(B_{n-1}) \\
&\overset{I.V.}{=} x(x^2 - y^2)^{n-1} \\
|B_{(2n)1}| &= (-1)^{2n-1+1} y \cdot \det(B_{(2n)1_{1(2n-1)}}) \\
&= y \cdot \det(B_{n-1}) \\
&\overset{I.V.}{=} y(x^2 - y^2)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Damit folgt direkt:

$$|B_n| = x \cdot x(x^2 - y^2)^{n-1} - y \cdot y(x^2 - y^2)^{n-1} = (x^2 - y^2)(x^2 - y^2)^{n-1} = (x^2 - y^2)^n.$$

$\square$