Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1.

- Berechnung der LU-Zerlegung. Es ist

$$PA = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 & 10 \\ 0 & -4 & 10 & \frac{15}{2} \\ 2 & -6 & 7 & -\frac{11}{2} \\ -2 & 10 & -12 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 & 10 \\ 0 & -4 & 10 & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 10 & \frac{9}{2} \\ 0 & 4 & -15 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 & 10 \\ 0 & -4 & 10 & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 10 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -5 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 & 10 \\ 0 & -4 & 10 & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 10 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} =: U.$$

L ergibt sich durch die Faktoren der Zeilenoperationen, also

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$PA = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 & 10 \\ 0 & -4 & 10 & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 10 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

- Es ist

$$\det(PA) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = -20 \implies \det(A) = -\frac{20}{\det(P)} = 20.$$

Es ist zunächst $\tilde{e}_1 = Pe_1 = e_2$, $\tilde{e}_2 = Pe_2 = e_1, \tilde{e}_3 = Pe_3 = e_3$ und $\tilde{e}_4 = Pe_4 = e_4$. Damit folgt durch Vorwärtseinsetzen in $Ly_i = \tilde{e}_i$:

$$y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, y_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Und durch Rückwärtseinsetzen in $Rx_i = y_i$ folgt

$$x_1 = \begin{pmatrix} -\frac{541}{20} \\ -\frac{13}{4} \\ \frac{9}{5} \\ -4 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} \frac{271}{20} \\ \frac{7}{4} \\ -\frac{4}{5} \\ 2 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -\frac{49}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} -\frac{263}{10} \\ -3 \\ \frac{9}{5} \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Die x_i sind die Spalten von A^{-1}, also folgt direkt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{541}{20} & \frac{271}{20} & -\frac{49}{4} & -\frac{263}{10} \\ -\frac{13}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} & -3 \\ \frac{9}{5} & -\frac{4}{5} & 1 & \frac{9}{5} \\ -4 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt direkt

$$Ax = b \implies x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- Für die Kondition gilt nach VL

$$\mathrm{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 24 \cdot 79\frac{3}{20} = 1899\frac{3}{5}.$$

Aufgabe 2. Sei T wie in der Aufgabe gegeben mit $bc > 0$.

(a) Es gilt

$$(v_k)_i = \nu^i \sin\left(i\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

Es sei außerdem $(v_k)_0 = (v_k)_{n+1} = 0$. Damit folgt

$$(Tv_k)_i = c(v_k)_{i-1} + a(v_k)_i + b(v_k)_{i+1}.$$

Es gilt außerdem

$$b\nu^{i+1} = b\frac{c^{\frac{i}{2}+\frac{1}{2}}}{b^{\frac{i}{2}+\frac{1}{2}}} = \frac{c^{\frac{i}{2}+\frac{1}{2}}}{b^{\frac{i}{2}-\frac{1}{2}}} = c\frac{c^{\frac{i}{2}-\frac{1}{2}}}{b^{\frac{i}{2}-\frac{1}{2}}} = c\nu^{i-1}. \tag{1}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
(\lambda_k v_k)_i &= \left[a + 2b\nu\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right]\nu^i \sin\left(i\frac{k\pi}{n+1}\right) \\
&= a\nu^i \sin\left(i\frac{k\pi}{n+1}\right) + 2b\nu^{i+1}\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\sin\left(i\frac{k\pi}{n+1}\right) \\
&\overset{\text{nützl. Formel}}{=} a(v_k)_i + b\nu^{i+1}\sin\left((i+1)\frac{k\pi}{n+1}\right) + b\nu^{i+1}\sin\left((i-1)\frac{k\pi}{n+1}\right) \\
&\overset{(1)}{=} a(v_k)_i + b(v_k)_{i+1} + c(v_k)_{i-1}.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$(Tv_k)_i = (\lambda_k v_k)_i \implies Tv_k = \lambda_k v_k.$$

Also v_k Eigenvektoren zu EW λ_k. Da $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sind die n Eigenwerte λ_k alle Eigenwerte von T.

(b) Beh.: $\mathrm{cond}_2(T) = \mathcal{O}(n^2)$.

Beweis. Für $a = 2$ und $b = c = -1$ ist T symmetrisch. Außerdem gilt für die Eigenwerte von T:

$$\lambda_k = 2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

Es gilt für $k = 1, \ldots, n$:

$$0 < \frac{k\pi}{n+1} < \pi \implies \left|\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right| < 1 \implies \lambda_k > 0.$$

Also ist T positiv definit. Es gilt weiter

$$\begin{aligned}
\min_{1\le k\le n} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) &= \cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right) \\
\max_{1\le k\le n} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Damit folgt $\lambda_{\min}(T) = \lambda_1 = 2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ und $\lambda_{\max}(T) = \lambda_n = 2 - 2\cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)$. Da T symmetrisch und positiv definit gilt also

$$\mathrm{cond}_2(T) = \frac{\lambda_{\max}(T)}{\lambda_{\min}(T)} = \frac{1 - \cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)} \le \frac{2}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}.$$

Für $\frac{\pi}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Also folgt mit Taylorentwicklung 2. Ordnung

$$\frac{2}{1-\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)} = \frac{2}{1-\left(1-\frac{\pi^2}{2(n+1)^2}+\mathcal{O}\left(\frac{\pi^3}{(n+1)^3}\right)\right)} \overset{\frac{\pi}{n+1}\ll 1}{\approx} \frac{2}{\frac{\pi^2}{2(n+1)^2}} = \frac{4(n+1)^2}{\pi^2}.$$

Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1-\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)} \cdot \frac{1}{n^2} \approx \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+8n+4}{\pi^2 n^2} = \frac{4}{\pi^2} < \infty.$$

Damit folgt $\operatorname{cond}_2(T) = \mathcal{O}(n^2)$. □

Aufgabe 3. a) Es sei

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} R_{11}^{(k)} & R_{12}^{(k)} \\ 0 & B^{(k)} \end{bmatrix} \tag{2}$$

mit

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} \alpha^{(k)} & (w^{(k)})^T \\ \sigma^{(k)} & C^{(k)} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

wobei $C^{(k)} \in \mathbb{R}^{(n-k-1)\times(n-k-1)}$ und $\sigma^{(k)}, w^{(k)} \in \mathbb{R}^{n-k-1}, \alpha^{(k)} \neq 0$. Da $\alpha^{(k)} \neq 0$, ist die Pivotisierung bereits durchgeführt oder nicht notwendig. Es gilt damit nach VL

$$A^{(k+1)} = A^{(k)} - l^{(k+1)}(u^{(k+1)})^T. \tag{4}$$

mit

$$l_i^{(k+1)} = \begin{cases} 0 & 1 \le i \le k \\ \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & k+1 \le i \le n \end{cases} \quad \text{und } u_j^{(k+1)} = \begin{cases} 0 & 1 \le j \le k \\ a_{k,j}^{(k)} & k \le j \le n \end{cases}.$$

Mit (2) folgt damit

$$l^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_{k,k}^{(k)}}\sigma^{(k)} \end{bmatrix} \quad \text{und } u^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & (w^{(k)})^T \end{bmatrix}.$$

Mit (1) und (3) folgt somit

$$A^{(k+1)} = A^{(k)} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha^{(k)}}\sigma^{(k)}(w^{(k)})^T \end{bmatrix}$$

Für $B^{(k+1)}$ gilt damit

$$B^{(k+1)} = C^{(k)} - \frac{1}{\alpha^{(k)}}\sigma^{(k)}(w^{(k)})^T.$$

b) Der Algorithmus führt die Gauß-Elimination zeilenweise durch. Dabei wird für Zeile i folgendermaßen verfahren:

1) Für jede Spalte, die nicht rechts der Diagonale ist, wird zunächst das i-te Element des $l^{(j)}$-Vektors berechnet.

$$l_i^{(j)} = a_{i,j-1} = \frac{a_{i,j-1}}{a_{j-1,j-1}}.$$

Das Element $a_{j-1,j-1}$ ist das Pivotelement des j-ten Schritts der LU Zerlegung aus der VL. In der Schleife für k, werden dann für $a_{i,j}$ sukzessiv alle Rang-1-Updates ausgeführt, der bis dahin berechneten $l_i^{(k)}$.

2) Die Elemente in den Spalten rechts der Diagonale sind keine Pivotelemente. Deshalb werden hier direkt die Rang-1-Updates $l_i^{(1)}$ bis $l_i^{(i-1)}$, die links der Diagonale stehen, ausgeführt.

Damit ist die Zeile i auf die finale Form gebracht und es wird mit $i+1$ weitergemacht.

Aufgabe 4. Implementierung siehe *prog_sparse_matrix.cc*. Plot in *sparse_plot.png*.

Die Komplexität in der `DenseMatrix` Variante ist wie zu erwarten $\mathcal{O}(N^2)$ und die Komplexität der `SparseMatrix` Variante $\mathcal{O}(N)$, da die Anzahl der Nicht-Null Elemente der verwendeten Flussmatrix aus dem Rohrleitungsnetzwerk linear ansteigt.