Lemma 1. $(a_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy Folgen.

Beweis. Sei $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, aber $b < a$. Dann $\exists \delta > 0$ mit $b + \delta = a$.

Wegen der Konvergenz:

$$b_n \to b, a_n \to a, n \to \infty.$$

$$\exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ sd. } |b - b_n| \leq \frac{1}{2}\delta.$$

und

$$|a - a_n| \leq \frac{1}{2}\delta \ \forall n > n_\epsilon.$$

Dann

$$b_n = b_n - b + b - a + a - a_n + a_n \leq |b_n - b| + b - a|a - a_n| + a_n \leq \frac{1}{2}\delta - \delta + \frac{1}{2}\delta + a_n = a_n.$$

$\implies$

$$b_n \leq a_n.$$

Widerspruch zur Annahme, dass $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung 1 (Folgerung aus 3)**.** Sei Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und $a_n \to a$, $a > 0$ $n \to \infty$. Dann $a_n > 0$ für fast alle n.

Beweis. Annahme: $a_n \leq 0$ für fast alle $n \in N$, dann $a_n \to a \leq 0 \leftarrow \{0\}$ $n \in N$ □

Ziel: Reelle Zahlen als Grenzwerte von rationalen Cauchy Folgen.

Wichtig: Zwei Cauchy Folgen mit gleichem Limes definieren gleiche Zahl. Deshalb: Äquivalenzklassen

Definition 1 (Äquivalenzrelation für Cauchy Folgen rationaler Zahlen)**.**

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a'_n)_{n\in\mathbb{N}} :\iff |a_n - a'_n| \to 0, n \to \infty.$$

Die Relation ist Äquivalenzrelation.

1. Reflexivität ($a \sim a$) (trivial)
2. Symmetrie ($a \sim b \implies b \sim a$)

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff |a_n - b_n| \to 0 \iff |b_n - a_n| \to 0 \iff (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

3. Transitivität $a \sim b, b \sim c \implies a \sim c$

$$\begin{aligned}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\ (c_n)_{n\in\mathbb{N}} &\iff |a_n - b_n| \to 0, |b_n - c_n| \to 0 \\ &\iff \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \text{ s.d.} \\ &\qquad \forall n \geq n_\epsilon.\end{aligned}$$

Dann

$$|a_n - c_n| = |(a_n - b_n) + (b_n - c_n)| \leq |a_n - b_n|.$$

□

Definition 2 (Äquivalenzklassen)**.**

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{R}} :=& \{[a_n]_{n\in\mathbb{N}}\} \\ =& \{(a'_n)_{n\in\mathbb{N}} | (a'_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\} \\ =& \{(a'_n)_{n\in\mathbb{N}} | (a'_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0\}.\end{aligned}$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Repräsentant von Klasse $[(a_n)]_{n\in\mathbb{N}}$

Bemerkung 2. $a \in \mathbb{Q} \implies$

$$[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n := a] \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ einer Cauchy Folge

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \in [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}].$$

Jede Äquivalenzklasse $[((a_n)_{n\in\mathbb{N}})]$ von Cauchy Folge rationaler Zahlen definiert genau eine reelle Zahl

Satz 1. Jeder Äquivalenzklasse $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ entspricht genau einem (möglicherweise unendlichen) Dezimalbruch.

Die Menge aller dieser Dezimalbrüche wird bezeichnet als Menge $\mathbb{R}$ der „reellen Zahlen".

$$\mathbb{R} = \{a := \pm(a_0 + 0, d_1 d_2 d_3 \dots d_k \ \mid a_0 \in \mathbb{N}_0, d_k \in \{0, \dots, 9\}\}.$$

Für eine CF rationaler Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird $a \in \mathbb{R}$ als Grenzwert bezeichnet:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt eine „approximierende" Folge von $a \in \mathbb{R}$. In diesem Sinne hat jede CF rationaler Zahlen nach Konstruktion einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.

Bemerkung 3 (Erinnerung Geometrische Reihe)**.**

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, x + 1.$$

Beweis. 1. $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \overline{\mathbb{R}}$

$$a = \pm(a_0 + 0, d_1 d_2 d_3 \dots).$$

definieren wir eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (rationaler) endlicher Teilbrüche:

$$a_n = \pm(a_0, d_1 \dots d_n), a_0 \in \mathbb{N}_0, d_k \in \{0, \dots, 9\}.$$

zu zeigen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy Folge.
Sei $m > n + 1$, dann

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= |a_0 + 0, d_1 d_2 \dots d_n - (a_0 + 0, d_1 d_2 \dots d_n d_{n+1} \dots d_m)| \\
&= |0,00 \dots 0 d_{n+1} \dots d_m| \\
&= d_{n+1} 10^{-(n+1)} + \dots + d_m 10^{-m} \\
&\le 10^{-n}(d_{n+1} 10^{-1} + \dots + d_m 10^{-m+n}) \\
&\le 10^{-n}(10^0 + \dots + 10^{-m+n+1}) \\
&= 10^{-n}\left(\left(\frac{1}{10}\right)^0 + \dots + \frac{1}{10}^{m-n-1}\right) \\
&= 10^{-n} \frac{1 - \frac{1}{10}^{m-n}}{1 - \frac{1}{10}} \\
&\le 10^{-n} \frac{1}{\frac{9}{10}} \\
&= 10^{-n} \frac{10}{9} \to 0, n \to \infty.
\end{aligned}$$

$\implies (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy Folge und repräsentiert eine Klasse $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \overline{\mathbb{R}}$
„Einbettung" $a \mapsto [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$

2. Wir zeigen, dass diese „Einbettung" bijektiv ist.
a) $a \mapsto [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ ist injektiv ($\forall a, a' \in \overline{R}$ gilt: aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt $a = a'$)

Für

$$a = a_0 + 0, d_1 d_2 \dots$$
$$a' = a_0' + 0, d_1' d_2' \dots$$

gilt:

$$|a_n - a_n'| = |a_0 + 0, d_1 \dots d_n - (a_0' + 0, d_1' \dots d_n')|$$
$$\leq \epsilon, \forall n \geq n_\epsilon, \forall \epsilon > 0.$$

$\implies a = a'$

b) „Einbettung" $a \mapsto [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ ist surjektiv

(i) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge

$$\implies z = 0 = 0, 00 \dots.$$

(ii) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge Dann fast alle $a_n > 0$ oder fast alle $a_n < 0$ O.B.d.A. $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$
Ziel: $z \geq 0$ zu konstruieren.
Falls $a_n < 0$ (bzw. $-a_n > 0$ konstruiert $-z$)

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \implies \text{beschränkt} \implies \exists N \in \mathbb{N} (N \geq 2) \text{ s.d. } 0 < a_n < N, n \in \mathbb{N}.$$

Dann $\exists z_0 \in \mathbb{N}_0$, s.d. im Interval:

$$I_0 := \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq z_0 \leq x < z_0 + 1 < n\}.$$

unendlich viele Elemente von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liegen.

□