Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	$\sum$
Punkte						

Aufgabe 1. Integralberechnung

(a) Integration von Monom

$$\int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{\sqrt{\sqrt{x^7}}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{7}{8}}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}\Big|_0^1 = \frac{8}{15}.$$

(b) Produktintegration

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x(1-x+x^2)\,\mathrm{d}x &= e^x(1-x+x^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x(2x-1)\,\mathrm{d}x \\ &= e^x(1-x+x^2)\Big|_0^1 - \left(e^x(2x-1) - \int_0^1 2e^x\,\mathrm{d}x\right) \\ &= e^x(1-x+x^2)\Big|_0^1 - e^x(2x-1)\Big|_0^1 + 2e^x\Big|_0^1 \\ &= e^x(x^2-3x+4)\Big|_0^1 \\ &= 2e-4.\end{aligned}$$

(c) Mit Substitution $t = x^2$ folgt

$$\int_0^1 e^{x^2}x^3\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^t t x \frac{\mathrm{d}t}{2x} = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t\cdot t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(e^t\cdot t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2}.$$

(d) Mit $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$ folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \tan(x)\cdot x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x$$

Mit Substitution $t = \cos x$ folgt

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\sin x}{t}\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = -\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -\ln t = -\ln(\cos x)$$

Damit folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} + \ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}(\pi - \ln 4).$$

Aufgabe 2. Weitere Eigenschaften von Integralen

(a) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi, \psi\colon [c,d] \to [a,b]$ differenziebar.
Beh.:

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x), \quad x \in [c,d].$$

Beweis. f stetig auf $[a,b]$, d.h. es ex. eine Stammfunktion F von f mit $F'(x) = f(x)$. Nach dem HDI gilt dann

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(\psi(x)) - F(\varphi(x)).$$

Damit folgt mit Kettenregel

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\left(F(\psi(x)) - F(\varphi(x))\right) = \frac{d}{\mathrm{d}x}F(\psi(x)) - \frac{d}{\mathrm{d}x}F(\varphi(x)) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

□

(b) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(a) = 0$.

Beh.:

$$\int_a^b |f(x)f'(x)| \,\mathrm{d}x \le \frac{b-a}{2} \int_a^b f'(x)^2 \,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Definiere $G(x) := \int_a^x |f'(t)| \,\mathrm{d}t$. Es folgt $G(a) = f(a) = 0$. Dann gilt $\forall x \in [a,b]\colon G(x) \ge 0$ und $G(x) \ge f(x)$. Außerdem ist $G'(x) = |f'(x)|$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)f'(x)| \,\mathrm{d}x &\le \int_a^b G(x)G'(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_a^b (G^2(x))' \,\mathrm{d}x \\
&\overset{G(a)=0}{=} \frac{1}{2} G(b)^2 \\
&\overset{G(a)=0}{=} \frac{1}{2} \left| \int_a^b G'(x) \,\mathrm{d}x \right|^2 \\
&\overset{\text{CSU}}{\le} \frac{1}{2} \int_a^b 1 \,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b G'(x)^2 \,\mathrm{d}x \\
&\overset{G'(x)=|f'(x)|}{=} \frac{b-a}{2} \cdot \int_a^b f'(x)^2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3 (Funktionenfolgen und Integration)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \frac{n^2 x}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Beh.:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) \,\mathrm{d}x \ne \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x) \,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Zunächst linke Seite mit Substitution $t = 1 + n^2x^2$:

$$\int_0^1 \frac{n^2x}{(1+n^2x^2)^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_1^{1+n^2} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{t}\bigg|_1^{1+n^2} = -\frac{1}{2+2n^2} + \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Zu zeigen: $f_n \xrightarrow[\text{punktweise}]{n\to\infty} f(x) := 0$. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{\frac{1}{n^2} + 2x^2 + n^2x^4} \right| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ne 0 = \int_0^1 0 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x) \,\mathrm{d}x.$$

□

Da f_n nicht gleichmäßig konvergent ist, ist Satz 1.3.1 nicht anwendbar.

Beweis. Zu zeigen: f_n nicht gleichmäßig konvergent.

Sei $\epsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{\epsilon \cdot 16}{\sqrt{27}}$. Dann wähle $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}n}$. Mit $f_n(x_0) = \frac{\sqrt{27}n}{16}$ folgt

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = |f_n(x_0)| = \left| \frac{\sqrt{27}n}{16} \right| > \left| \frac{\sqrt{27}\epsilon 16}{16\sqrt{27}} \right| = \epsilon.$$

□

Aufgabe 4 (Uneigentliche Integrale und Funktionenfolgen)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \frac{1}{n} e^{-\frac{x}{n}}, \quad x \geq 0.$$

Beh.: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig, aber

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x) \, \mathrm{d}x \neq \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x.$$

Beweis. Zu zeigen: $f_n \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{n\to\infty} f(x) := 0$.

Sei $\epsilon > 0$ und $x \in [0, \infty)$ beliebig. Wähle $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Wegen $x \geq 0$ und $n \geq 1$, folgt $\frac{x}{n} \geq 0 \implies e^{-\frac{x}{n}} \leq 1$. Damit folgt direkt $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$:

$$\left| \frac{1}{n} e^{-\frac{x}{n}} - 0 \right| \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \leq \frac{1}{n_0} < \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon.$$

$\implies f_n \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{n\to\infty} f(x)$.

Damit folgt

$$\int_0^1 \frac{1}{n} e^{-\frac{x}{n}} \, \mathrm{d}x = -e^{-\frac{x}{n}} \Big|_0^\infty = -\left(\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{n}} - 1 \right) = 1 \neq 0 = \int_0^\infty f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x.$$

□

$[0, \infty)$ ist kein kompaktes Intervall, weshalb Satz 1.3.1 nicht anwendbar ist.

Aufgabe 5 (Stammfunktionen)**.** Mit Produktintegration folgt sofort

$$\begin{aligned}
&\int \cos(x) \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos^2(x) - \int \cos(x) \sin(x) \, \mathrm{d}x \\
\implies 2 &\int \cos(x) \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos^2(x) \\
\implies &\int \cos(x) \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \cos^2(x).
\end{aligned}$$