Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. Es sei K Körper, M eine Menge und $m_0 \in M$ ein fest gewähltes Element. In $V = \text{Abb}(M, K)$ betrachten wir die Teilmengen $U = \{f \in V \mid f(m_0) = 0\}$ und $W = \{f \in V \mid \forall x, y \in M\colon f(x) = f(y)\}$

a) Zunächst: K ist K-Vektorraum. Damit wird $V = \text{Abb}(M, K)$ mit $0_V(m) = 0\ \forall m \in M$ zum K-Vektorraum.

Damit eine Teilmenge $M \subset V$ zum Untervektorraum von V wird, muss gelten:

$$m_1 + m_2 \in M\ \forall m_1, m_2 \in M.$$

und

$$am_1 \in M\ \forall m_1 \in M, a \in K.$$

Die Inversen der zugehörigen Untergruppe sind gegeben durch

$$m^{-1} = (-1)_K m \in M\ \forall m \in M.$$

Beh.: $U \subset V$ ist Untervektorraum.

Beweis. Seien $f_1, f_2 \in U$, $a \in K$ beliebig. Zu zeigen: $(f_1 + f_2)(m_0) = 0$ und $(af_1)(m_0) = 0$.

$$(f_1 + f_2)(m_0) = f_1(m_0) + f_2(m_0) = 0 + 0 = 0.$$

$\implies (f_1 + f_2) \in U$.

$$(af_1)(m_0) = af_1(m_0) = a \cdot 0 = 0.$$

$\implies (af_1) \in U$. □

Beh.: $W \subset V$ ist Untervektorraum

Beweis. Seien $f_1, f_2 \in W$, $a \in K$ und $x, y \in M$ beliebig. Zu zeigen: $(f_1 + f_2)(x) = (f_1 + f_2)(y)$ und $(af_1)(x) = (af_1)(y)$.

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = f_1(y) + f_2(y) = (f_1 + f_2)(y).$$

$\implies (f_1 + f_2) \in W$.

$$(af_1)(x) = af_1(x) = af_1(y) = (af_1)(y).$$

$\implies (af_1) \in W$. □

b) Beh.: $U \cap W = \{0\}$

Beweis. Zunächst: $0_V(m_0) = 0 \implies 0_V \in U$ und $0_V(x) = 0 = 0_V(y)\ \forall x, y \in M \implies 0_V \in W$. Daraus folgt $0_V \in U \cap W \implies U \cap W \neq \emptyset$.

Sei $f \in U \cap W$ beliebig:

$$\begin{aligned} &\forall m \in M\colon f(m) = f(m_0) \wedge f(m_0) = 0 \\ \implies &\forall m \in M\colon f(m) = 0 \\ \implies &f = 0_V. \end{aligned}$$

□

c) Beh.: $V = U + W$

Beweis. Sei $f \in V$ beliebig.
Zu zeigen: $\exists u \in U, \exists w \in W : f = u + w$
Dann wähle $u \in U$, s.d.

$$u(m) = \begin{cases} f(m) - f(m_0) & m \neq m_0 \\ 0 & m = m_0 \end{cases}.$$

und $w \in W$, s.d.

$$w(m) = f(m_0)\ \forall m \in M.$$

u und w sind wohldefiniert, da f Abbildung ist.
Damit folgt:

$$f(m) = u(m) + w(m) = \begin{cases} f(m) - f(m_0) + f(m_0) = f(m) & m \neq m_0 \\ 0 + f(m_0) = f(m_0) & m = m_0 \end{cases}.$$

□

Aufgabe 2. Es sei K ein Körper, $U = \text{Abb}(\{0, 1, \ldots, n\}, K)$ und $V = \text{Abb}(\{0, 1, \ldots, n+1\}, K)$.

$$\begin{aligned} \psi \colon V &\to K^{n+2} \\ f &\mapsto (f(0), f(1), \ldots, f((n+1)) \\ \partial \colon V &\to U \\ f &\mapsto (i \mapsto (i+1) \cdot f(i+1)) \,. \end{aligned}$$

a) Beh.: ψ ist linear.

Beweis. Seien $v_1, v_2 \in V$, $a \in K$ beliebig. Zunächst: $\psi(v_1)$ wohldefiniert, da v_1 Abbildung ist und jedes Tupelelement genau einem Bild von v_1 zugeordnet wird.

$$\begin{aligned} \psi(v_1 + v_2) &= ((v_1 + v_2)(0), (v_1 + v_2)(1), \ldots, (v_1 + v_2)(n+1)) \\ &= (v_1(0) + v_2(0), v_1(1) + v_2(1), \ldots, v_1(n+1) + v_2(n+1)) \\ &= (v_1(0), v_1(1), \ldots, v_1(n+1)) + (v_2(0), v_2(1), \ldots, v_2(n+1)) \\ &= \psi(v_1) + \psi(v_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(av_1) &= (av_1(0), av_1(1), \ldots, av_1(n+1)) \\ &= a(v_1(0), v_1(1), \ldots, v_1(n+1) \\ &= a\psi(v_1). \end{aligned}$$

□

Beh.: ∂ ist linear.

Beweis. Seien $v_1, v_2 \in V$, $a \in K$ und $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ beliebig. Zunächst: $\partial(v_1)$ wohldefiniert, da v_1 Abbildung ist.

$$\begin{aligned} \partial(v_1 + v_2)(i) &= (i+1) \cdot (v_1 + v_2)(i+1) \\ &= (i+1) \cdot (v_1(i+1) + v_2(i+1)) \\ &= (i+1) \cdot v_1(i+1) + (i+1) \cdot v_2(i+1) \\ &= \partial(v_1)(i) + \partial(v_2)(i). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial(av_1)(i) &= (i+1) \cdot (av_1)(i+1) \\ &= a(i+1) \cdot v_1(i+1) \\ &= a \cdot \partial(v_1)(i). \end{aligned}$$

□

b) Beh.: ψ ist Isomorphismus.

Beweis. Zu zeigen: ψ ist bijektiv.

Seien $v_1, v_2 \in V$ mit $\psi(v_1) = \psi(v_2)$. Dann

$$\begin{aligned} &\psi(v_1) = (v_1(0), v_1(1), \dots, v_1(n+1)) = (v_2(0), v_2(1), \dots, v_2(n+1)) = \psi(v_2) \\ \implies &v_1(k) = v_2(k) \ \forall k \in \{0, \dots, n+1\} \\ \implies &v_1 = v_2. \end{aligned}$$

$\implies \psi$ ist injektiv.

Sei $c = (c_0, \dots, c_{n+1}) \in K^{n+2}$, dann ex. ein $v \in V$, s.d.

$$\begin{aligned} &v(k) = c_k \ \forall k \in \{0, \dots, n+1\} \\ \implies &\psi(v) = c. \end{aligned}$$

$\implies \psi$ ist surjektiv. □

c) Beh.: ∂ surjektiv $\iff \operatorname{char} K \notin \{2, \dots, n+1\}$

Beweis. Damit ∂ surjektiv ist, muss für alle $u \in U$ ein $v \in V$ existieren, s.d. $\partial(v) = u$.

Sei $u \in U, k \in \{0, \dots, n\}$ beliebig, dann muss für v gelten:

$$\partial(v)(k) = (k+1) \cdot v(k+1) = u(k).$$

Dies ist genau dann wohldefiniert, wenn $k+1 \neq 0$, denn genau dann ex. ein Inverses zu $k+1$ und damit:

$$v(k+1) = (k+1)^{-1} \cdot u(k).$$

Bleibt zu zeigen: $\operatorname{char} K \notin \{2, \dots, n+1\} \iff k+1 \neq 0 \ \forall k \in \{0, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned} & k+1 \neq 0 \\ \overset{k \geq 0}{\iff} \quad & k+1 \neq \operatorname{char} K \\ \overset{1 \leq k+1 \leq n+1}{\iff} \quad & \operatorname{char} K = 0 \lor \operatorname{char} K > n+1 \\ \iff \quad & \operatorname{char} K \notin \{2, \dots, n+1\}. \end{aligned}$$

□

d) Bestimmen Sie $\psi(\ker K) \subset K^{n+2}$.

Lösung.

$$\ker \partial = \{f \in V \mid (\partial(f))(k) = 0 \ \forall k \in \{0, 1, \dots n\}\}.$$

Damit $f \in \ker \partial$, muss folglich gelten:

$$(\partial(f))k = 0 \ \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

$\iff$

$$(k+1) \cdot f(k+1) = 0 \ \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

$\overset{K \text{ Körper}}{\iff}$

$$k+1 = 0 \lor f(k+1) = 0 \ \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Aus (c) folgt: $k+1 \neq 0 \iff \text{char K} \notin \{2, \dots, n+1\}$.

(i) char $K \notin \{2, \dots, n+1\}$: Dann ist $k+1 \neq 0$, d.h.

$$\begin{aligned} &f(k+1) = 0 \ \forall k \in \{0, 1, \dots, n\} \\ \implies &f(k) = 0 \ \forall k \in \{1, \dots, n+1\} \\ \implies &\ker \partial = \{f \in V \mid f(k) = 0 \ \forall k \in \{1, \dots, n+1\}\}. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\psi(\ker \partial) = \{(a, \underbrace{0, \dots, 0}_{n+1\text{-mal}}) \mid a \in K\}.$$

(ii) char $K \in \{2, \dots, n+1\}$: Dann gilt für $k = \text{char } K - 1$:

$$k + 1 = \text{char } K - 1 + 1 = \text{char } K = 0_K.$$

Für alle $k \in \{0, 1, \dots, n\}, k \neq \text{char } K - 1$, folgt analog zu (i):

$$f(k+1) = 0.$$

Damit folgt:

$$\ker \partial = \{f \in V \mid f(k) = 0 \ \forall k \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{\text{char } K\}\}.$$

Damit ergibt sich:

$$\psi(\ker \partial) = \{(a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) \in K^{n+2} \mid a_k = 0 \ \forall k \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{\text{char } K\}\}.$$

□

Aufgabe 3. Es sei K ein Körper und U, V zwei K-Vektorräume.

a) Beh.: Ist $f\colon U \to V$ linear, ist auch die duale Abbildung $f^*\colon V^* \to U^*$ linear.

Beweis. Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$ und $a \in K$ beliebig. Zunächst: $f^*(\varphi_1)$ wohldefiniert, weil φ_1 und f Abbildungen sind.

$$\begin{aligned} f^*(\varphi_1 + \varphi_2) &= (\varphi_1 + \varphi_2) \circ f = \varphi_1 \circ f + \varphi_2 \circ f = f^*(\varphi_1) + f^*(\varphi_2) \\ f^*(a\varphi_1) &= (a\varphi_1) \circ f = a(\varphi_1 \circ f) = af^*(\varphi_1). \end{aligned}$$

□

b) Beh.: Die Auswertungsabbildung ev: $U \to (U^*)^*$, mit

$$u \mapsto (f \mapsto f(u))$$

ist linear.

Beweis. Seien $u_1, u_2 \in U$, $a \in K$ und $f \in U^*$ beliebig. Zunächst: $(\text{ev}(u_1))(f)$ wohldefiniert, weil $f\colon U \to K$ Abbildung ist.

$$\begin{aligned} (\text{ev}(u_1 + u_2))(f) &= f(u_1 + u_2) \overset{f \text{ linear}}{=} f(u_1) + f(u_2) = (\text{ev}(u_1))(f) + (\text{ev}(u_2))(f) \\ (\text{ev}(au_1))(f) &= f(au_1) \overset{f \text{ linear}}{=} af(u_1) = a \cdot (\text{ev}(u_1))(f). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 4. Es sei K ein Körper und U, V zwei K-Vektorräume.

a) Beh.: Die Abbildung $*\colon \text{Hom}_K(U, V) \to \text{Hom}_K(V^*, U^*)$ ist linear.

Beweis. Seien $f_1, f_2 \in \text{Hom}_K(U, V)$, $\varphi \in V^*$ und $a \in K$ beliebig. Zunächst: $(*(f_1))(\varphi) = \varphi \circ f_1$ wohldefiniert, weil φ und f_1 Abbildungen.

$$\begin{aligned} (*(f_1 + f_2))(\varphi) &= ((f_1 + f_2)^*)(\varphi) = \varphi \circ (f_1 + f_2) \overset{\varphi \text{ linear}}{=} \varphi \circ f_1 + \varphi \circ f_2 = (*(f_1))(\varphi) + (*(f_2))(\varphi) \\ (*(af_1))(\varphi) &= ((af_1)^*)(\varphi) = \varphi \circ (af_1) \overset{\varphi \text{ linear}}{=} a \cdot (\varphi \circ f_1) = a \cdot (*(f_1))(\varphi). \end{aligned}$$

□

b) Beh.: Ist $f\colon U \to V$ linear und surjektiv, so ist $f^*\colon V^* \to U^*$ injektiv.

Beweis. Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Hom}_K(V, K) = V^*$ mit $f^*(\varphi_1) = f^*(\varphi_2)$. Dann folgt:

$$\varphi_1 \circ f = \varphi_2 \circ f.$$

das heißt:

$$\forall u \in U\colon \varphi_1(f(u)) = \varphi_2(f(u)).$$

Wegen f surjektiv gilt: $V = f(U)$ und damit:

$$\forall v \in V\colon \varphi_1(v) = \varphi_2(v).$$

$\implies \varphi_1 = \varphi_2$
$\implies f^*$ injektiv □