

1 Grundlagen

1.1 Vollständige Induktion

Beispiel 1. Betrachte die Summe der ersten n natürlichen Zahlen. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Induktionsanfang für $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+2)}{2} = 1.$$

Induktionsschritt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

□

Definition 1. Seien $m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$

$a_m, a_{m+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann $a_m + a_{m+1} + \dots + a_n = \sum_{k=m}^n a_k$. Falls $m > n$, dann $\sum_{k=m}^n a_k := 0$

Beispiel 2. Definiere rekursiv für $x \in \mathbb{R}$: $x^0 := 1$ und $x^{n+1} := x \cdot x^n, n \in \mathbb{N}_0$ Betrachte

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n, x \in \mathbb{R}.$$

Dann heißt

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

geometrische Summenformel.

Beweis. Induktionsanfang für $n = 1$:

$$1 + x = \frac{(1+x)(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}.$$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^n x^k + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + \frac{(1-x)(x^{n+1})}{1-x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

□

Alternativbeweis mit Teleskop-Summe.

$$\begin{aligned} 1 - x^{n+1} &= 1 - x + x - x^2 + x^2 - \dots - x^n + x^n - x^{n+1} + 1 \\ &= \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=0}^n x^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n x^k - x \end{aligned}$$

□

Als Anwendung der geometrischen Summenformel ergeben sich nützliche Formeln, z.B. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

Beweis. Für $a = 0$ und $a = b$ stimmt die Formel offenbar.

Betrachte geometrische Reihe mit $x := \frac{b}{a} \neq 1$

$$1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n = 1 - x^n = (1 - x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \left(1 - \frac{b}{a}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^k$$

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-1-k} = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

□

1.2 Elemente der Kombinatorik

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Fakultät $n!$ rekursiv definiert durch:

$$1! := 1 \text{ und } \forall n \in \mathbb{N} : (n+1)! = n!(n+1).$$

Per Definition $0! := 1$

Satz 1 (Permutationen). Die Anzahl aller Anordnungen (oder Permutationen) von $n \in \mathbb{N}$ Elementen ist $n!$.

Beweis. Induktionsanfang:

$n = 1$: Eine Anordnung 1

$n = 2$: Zwei Anordnungen 12, 21

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$: Anzahl von Anordnungen der Elemente $1, \dots, n+1$, die das Element $(n+1)$ auf Platz 1 hat bei beliebiger Anordnung der anderen Elemente nach Induktionsannahme ist $n!$. Für jedes der $n+1$ Plätze ergeben sich wieder $n!$ Anordnungen, d.h. insgesamt: $n!(n+1) = (n+1)!$ □

Definition 2 (Binomialkoeffizient). Für $n, k \in \mathbb{N}$ definieren wir:

$$\begin{aligned} n \geq k \geq 1 : \binom{n}{k} &:= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \\ k = 0 : \binom{n}{0} &:= 1 \end{aligned}$$

$\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k -Elementigen Teilmengen einer n -Elementigen Menge, z.B.: Lotto $\binom{49}{6} = 13.983.816$.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} \end{aligned}$$

Es folgt $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Lemma 1. Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $0 < k < n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-1-(k-1)+1)}{(k-1)!} + \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-1-k+1)}{(k-1)!k} \\ &= \frac{(n-1)\dots(n-k+1)(k+n-k)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1. Mit Hilfe der Rekursionsformel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

bzw

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

berechnet man die Binomialkoeffizienten explizit, auch bekannt als „Pascalsches Dreieck“.

Satz 2 (Binomische Formel). Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

bzw.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n.$$

Beweis durch Induktion. Induktionsanfang $n = 1$:

$$a+b = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = 1a + 1b.$$

Annahme: Die Formel gilt für ein $n \geq 1$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n+1$

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= (a+b) \left(\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \right) \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \dots + \binom{n}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{n} a b^n \\ &\quad + \binom{n}{0} a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^n + \binom{n}{n} b^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \dots + \binom{n+1}{n} a b^n + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}. \end{aligned}$$

□

1.3 Grundlegendes über Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ natürliche Zahlen.

auf $\mathbb{N}$ sind die arithmetischen Operationen „+“ (Addition) und „·“ (Multiplikation) definiert. Für diese gelten u.a. die Regeln:

$$\begin{aligned} n + m &= m + n \text{ bzw. } n \cdot m = m \cdot n && \text{Kommutativität} \\ (n + m) + k &= n + (m + k) \text{ bzw. } (n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k) && \text{Assoziativität} \\ (n + m) \cdot k &= n \cdot k + m \cdot k && \text{Distributivität} \end{aligned}$$

Subtraktion und Division sind nicht für alle Paare der natürlichen Zahlen definiert ($1 - 2 \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$), d.h. die natürlichen Zahlen sind bezüglich der Subtraktion und Division „unvollständig“. Dies bedeutet, dass für $n, m \in \mathbb{N}$ z.B.: die Gleichung

$$n + x = m$$

nicht immer lösbar ist.

Deshalb werden die natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen erweitert.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ ganze Zahlen.}$$

In $\mathbb{Z}$ hat die Gleichung $n + x = m$ die (eindeutige) Lösung: $x = m - n \in \mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}$ ist vollständig bezüglich der Subtraktion aber unvollständig bezüglich der Division, d.h. für beliebige $b, y \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, die „lineare“ Gleichung $b \cdot x = y$ nicht immer durch ein $x \in \mathbb{Z}$ lösbar ist.

Diese Beschränkung wird durch die Einführung der rationalen Zahlen behoben:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{r}{s} \mid r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N} \right\}.$$

Die Menge $\mathbb{Q}$ ist vollständig bezüglich der vier elementaren arithmetischen Operationen (bis auf die unzulässige Division durch Null).

$$a = \frac{r}{s}, b = \frac{u}{v} \in \mathbb{Q} = \begin{cases} a + b = \frac{r}{s} + \frac{u}{v} & := \frac{r \cdot v + u \cdot s}{s \cdot v} \\ a - b & := \frac{r \cdot v - u \cdot s}{s \cdot v} \\ a \cdot b & := \frac{r \cdot u}{s \cdot v} \\ \frac{a}{b} & := \frac{r \cdot v}{s \cdot u} \end{cases}.$$

$\mathbb{Q}$ bildet mit der Operation „+“ und „-“ einen „Körper“ bildet.

1.4 Was ist ein Körper?

Sei K eine Menge mit Operationen „+“ und „·“.

Operation „+“ erfüllt die Axiome der Addition

1. Kommutativität $\forall a, b \in K : a + b = b + a$
2. Assoziativität $\forall a, b, c \in K : (a + b) + c = a + (b + c)$
3. Neutrales Element $\exists 0 \in K : \forall a \in K : a + 0 = a$
4. Additives Inverses $\forall a \in K : \exists -a \in K : a + (-a) = 0$

Operation „·“ erfüllt Axiome der Multiplikation

1. Kommutativität $\forall a, b \in K : a \cdot b = b \cdot a$
2. Assoziativität $\forall a, b, c \in K : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

3. Neutrales Element $\exists 1 \in K \setminus \{0\} =: K^* : \forall a \in K : a \cdot 1 = a$

4. Additives Inverses $\forall a \in K : \exists a^{-1} \in K : a \cdot a^{-1} = 1$

Zusätzlich gilt „+“ und „·“ erfüllen die Distributivität (D):

$$\forall a, b, c \in K : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Definition 3 (Körper). Eine Menge K mit Operationen „+“ und „·“ ($K, +, \cdot$) die Axiome A1-A4, M1-M4 und D erfüllt, heißt Körper.

Beispiel 3. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper

Definition 4 (Angeordneter Körper). Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Es $\exists p \subset K$ eine Teilmenge, die Axiome erfüllt:

1. $\forall a \in K$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:

(a) $a \in P$

(b) $a = 0$

(c) $-a \in P$

2. Aus $a > 0$ und auch $b > 0$ folgt: $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$

Dann heißt $(K, +, \cdot, >)$ angeordneter Körper.

Definition 5 (Positivität). Sei $(K, +, \cdot, >)$ ein angeordneter Körper. $a \in K$ heißt positiv falls $a > 0$. $a \in K$ heißt negativ falls $a < 0$.

$$K^+ := \{a \in K \mid a > 0\}.$$

$$K^- := \{a \in K \mid a < 0\}.$$

Ordnungsrelation für $a, b \in K$

$$a < b \iff b - a \in K^+$$

$$b > a : \iff a < b$$

$$a \leq b : \iff a < b \vee a = b$$

$$b \geq a : \iff a \leq b$$

.

Für je zwei $a \in K, b \in K$ gilt genau eine der Relationen $a < b, a = b, a > b$.

Es gelten Regeln:

• $a < b, b < c \implies a < c$ Transitivität

• $a < b \implies a + c < b + c, c \in K$

• $a < b \implies a \cdot c < b \cdot c, c \in K^+$

• $a \geq b, b \geq a \iff a = b$

• $a < b, a > 0, b > 0 \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Beispiel 4 (Positivität auf $\mathbb{Q}$).

$$\mathbb{Q}^+ := \left\{ a \in \mathbb{Q} \mid a = \frac{r}{s}, r, s \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definition 6 (Absolutbetrag). Sei $(K, +, \cdot, >)$ ein angeordneter Körper. Dann

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}.$$

Abbildung $|\cdot|: K \rightarrow K$ mit Eigenschaften:

- $|a| = 0 \iff a = 0$ (Definiertheit)
- $|ab| = |a||b|$ (Multiplikativität)
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis der Dreiecksungleichung. Beobachtung: $\pm a \leq |a| \implies a + b \leq |a| + |b| \implies -(a + b) \leq |a| + |b|$ $\square$

Es folgt aus den Eigenschaften:

- $|a - b| = 0 \implies a = b$
- $|-a| = |a|$
- $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
- $||a| - |b|| \leq |a - b|$ (folgt aus: $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$ und $|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|$)

Satz 3 (Dezimalbruchdarstellung). Jede rationale Zahl a besitzt eine endliche oder periodische Dezimalbruchdarstellung der Form:

$$a = \pm(a_0 + 0, d_1 \dots d_s) : \iff a = \pm \left(a_0 + \sum_{k=1}^s d_k \cdot 10^{-k} \right).$$

bzw.

$$a = \pm(a_0 + 0, d_1 \dots d_s \overline{d_{s+1} \dots d_{s+t}}).$$

$a_0 \in \mathbb{N}_0, d_1 \dots d_s \in \{0, 1, \dots, 9\}$ Ziffern

Umgekehrt stellt jede Dezimalbruchzerlegung dieser Art eine rationale Zahl dar.
Hier: bei periodischen Dezimalbrüchen ist die Periode $\bar{9}$ nicht zugelassen:

$$a_0, d_1 \dots d_{k-1} d_k \bar{9} := a_0 + 0, d_1 \dots d_k (d_k + 1), d_k < 9.$$

Beweis. Siehe Lehrbuch $\square$

2 Die Reellen Zahlen

2.1 Von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen

Lemma 2 (Irrationalität der Quadratwurzel). Die quadratische Gleichung $x^2 = 2$ besitzt keine rationale Lösung.

Beweis durch Widerspruch. Angenommen: Es existiert eine rationale Lösung

$$x := \sqrt{2} = \frac{r}{s}.$$

mit Zahlen $r \in \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{N}$.

O.B.d.A. (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit) nehmen wir an, dass r und s teilerfremd sind.

Dann gilt: $r \neq 0$ und $r^2 = 2s^2$ und $\frac{1}{2}r^2 = s^2$. Also muss r^2 und auch r gerade sein, denn $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ ungerade (Kontraposition). Damit sind auch $\frac{1}{2}r^2$ gerade und s^2 gerade.

Aber wegen Teilerfremdheit können r^2 und s^2 nicht beide durch zwei teilbar sein. $\implies$ Widerspruch zur Annahme $\square$

Bemerkung 2. Allgemeiner: „quadratische“ Gleichung

$$a + bx + cx^2 = 0.$$

ist nicht für beliebig gewählte $a, b, c \in \mathbb{Q}$ durch ein $x \in \mathbb{Q}$ lösbar.

Bemerkung 3 (Beweisarten). Direkter Beweis:

$$E \implies E_1 \implies E_2 \implies \dots \implies E_k \implies V.$$

Indirekter Beweis: Zeigen E und $\neg V$ immer falsch. Da E immer wahr ist, muss $\neg V$ falsch sein. Da $\neg V$ falsch ist, dann ist V wahr.

Ziel: Konstruiere rationale Zahlen, welche die Gleichung $x^2 = 2$ mit zunehmender Genauigkeit erfüllen, z.B. rekursiv durch Einschließung mit Hilfe von Dezimalbrüchen.

Wir nutzen die Eigenschaft: $a, b > 0$ und $a^2 < b^2 \implies a < b$, folgt aus:

$$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a), (b + a > 0).$$

Start: $a_1 := 1, 4$, $b_1 := 1, 5$ mit $a_1 < b_1$, $a_1^2 = 1, 96 < 2 < 2, 25 = b_1^2$

2 Fälle:

Fall a) Es liege für ein $n \in \mathbb{N}$ eine Einschließung vor:

$$a_n = 1, d_1 d_2, \dots d_{n-1} d_n < b_n = 1, d_1 d_2 \dots d_{n-1} (d_{n+1}).$$

$$a_n^2 < 2 < b_n^2.$$

$$d_k \in \{0, 1, \dots, 9\}, k = 1 \dots n-1, d_n \leq 8$$

Die nächste Einschließung ist

$$a_{n+1} := 1, d_1 \dots d_n, d_{n+1}, d_{n+1} \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

a_{n+1} möglichst groß aber $a_{n+1}^2 < 2$.

und

$$b_{n+1} := \begin{cases} 1, d_1, \dots d_n (d_{n+1} + 1) & \text{für } d_{n+1} \leq 8 \\ 1, d_1, \dots (d_n + 1) 0 & \text{für } d_{n+1} = 9 \end{cases}.$$

Nach Konstruktion:

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n.$$

$$a_{n+1}^2 < 2 < b_{n+1}^2.$$

Fall b) Für ein $n \in \mathbb{N}$ liegt eine Einschließung vor

$$a_1 = 1, d_1 \dots d_{n-1} d_n < b_n = 1, d_1 d_2 \dots d_{n-1} (d_n + 1) 0 \dots 0.$$

$$a_n^2 < 2 < b_n^2 \text{ mit } d_k \in \{0, 1, \dots, 9\}, k = 1, n = 1.$$

$$d_n \leq 8, d_{n+1} = \dots = d_n = 9.$$

Die nächste Einschließung

$$a_{n+1} := 1, d_1 \dots d_n, d_{n+1}, d_{n+1} \in 0, 1, \dots, 9.$$

a_{n+1} möglichst groß, aber $a_{n+1}^2 < 2$.

$$b_{n+1} = \begin{cases} 1, d_1 \dots d_n (d_{n+1} + 1) & \text{für } d_{n+1} \leq 8 \\ 1, d_1 \dots d_{m-1} (d_m + 1) 0 \dots 0 & \text{für } d_{n+1} = 9 \end{cases}.$$

Der Fall b) kann nur endlich oft hintereinander auftreten, dann wäre $a_n = b_n$ ab einem gewissen n und folglich $a_n^2 = 2$

Nach Konstruktion:

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n.$$

$$a_{n+1}^2 < 2 < b_{n+1}^2.$$

Wir erhalten 2 Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften

$$1, 4 = a_1 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq \dots b_1 = 1, 5.$$

Konkret: $a_1 = 1, 4$, $a_2 = 1, 41$, $a_3 = 1, 414$ $b_1 = 1, 5$, $b_2 = 1, 42$, $b_3 = 1, 415$

Abstand $b_n - a_n \leq 10^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ wird immer kleiner $\implies$ wir sollen die Zahl $\sqrt{2}$ eventuell erfassen!

Definition 7 (Zahlenfolge). Eine Menge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nummerierter rationaler Zahlen wird „Folge“ genannt.

Beispiel 5. $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

$$a_1 = 2, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{5}{4}$$

Offenbar, $1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ bzw.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

d.h. Folge konvergiert gegen 1

Definition 8 (Konvergenz). Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent, gegen einen „Limes“ a , wenn gilt:

$$|a_n - a| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Falls $|a_n|, n \rightarrow \infty$ heißt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strikt divergent.

Präziser (Cauchy)

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist „konvergent“ gegen einen Grenzwert a , wenn:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists n := n(\epsilon) = n_\epsilon.$$

sodass

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ für } n \geq n_\epsilon.$$

Lemma 3. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy Folgen.

Beweis. Sei $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, aber $b < a$. Dann $\exists \delta > 0$ mit $b + \delta = a$.

Wegen der Konvergenz:

$$b_n \rightarrow b, a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty.$$

$$\exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ sd. } |b - b_n| \leq \frac{1}{2} \delta.$$

und

$$|a - a_n| \leq \frac{1}{2} \delta \quad \forall n > n_\epsilon.$$

Dann

$$b_n = b_n - b + b - a + a - a_n + a_n \leq |b_n - b| + |b - a| + |a - a_n| + a_n \leq \frac{1}{2} \delta - \delta + \frac{1}{2} \delta + a_n = a_n.$$

$\implies$

$$b_n \leq a_n.$$

Widerspruch zur Annahme, dass $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung 4 (Folgerung aus 3). Sei Cauchy-Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge und $a_n \rightarrow a$, $a > 0$ $n \rightarrow \infty$. Dann $a_n > 0$ für fast alle n .

Beweis. Annahme: $a_n \leq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, dann $a_n \rightarrow a \leq 0 \leftarrow \{0\} \quad n \in \mathbb{N}$ □

Ziel: Reelle Zahlen als Grenzwerte von rationalen Cauchy Folgen.

Wichtig: Zwei Cauchy Folgen mit gleichem Limes definieren gleiche Zahl. Deshalb: Äquivalenzklassen

Definition 9 (Äquivalenzrelation für Cauchy Folgen rationaler Zahlen).

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (a'_n)_{n \in \mathbb{N}} : \Longleftrightarrow |a_n - a'_n| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Die Relation ist Äquivalenzrelation. 1. Reflexivität ($a \sim a$) (trivial)

2. Symmetrie ($a \sim b \implies b \sim a$)

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \Longleftrightarrow |a_n - b_n| \rightarrow 0 \Longleftrightarrow |b_n - a_n| \rightarrow 0 \Longleftrightarrow (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (a_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

3. Transitivität $a \sim b, b \sim c \implies a \sim c$

$$\begin{aligned} (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (c_n)_{n \in \mathbb{N}} &\Longleftrightarrow |a_n - b_n| \rightarrow 0, |b_n - c_n| \rightarrow 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \text{ s.d.} \\ &\quad \forall n \geq n_\epsilon. \end{aligned}$$

Dann

$$|a_n - c_n| = |(a_n - b_n) + (b_n - c_n)| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n| \rightarrow 0.$$

□

Definition 10 (Äquivalenzklassen).

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{R}} &:= \{[a_n]_{n \in \mathbb{N}}\} \\ &= \{(a'_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (a'_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (a_n)_{n \in \mathbb{N}}\} \\ &= \{(a'_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (a'_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0\}. \end{aligned}$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Repräsentant von Klasse $[a_n]_{n \in \mathbb{N}}$

Bemerkung 5. $a \in \mathbb{Q} \implies$

$$[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_n := a] \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ einer Cauchy Folge

$$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \in [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}].$$

Jede Äquivalenzklasse $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ von Cauchy Folge rationaler Zahlen definiert genau eine reelle Zahl

Satz 4. Jeder Äquivalenzklasse $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ entspricht genau einem (möglicherweise unendlichen) Dezimalbruch.

Die Menge aller dieser Dezimalbrüche wird bezeichnet als Menge $\mathbb{R}$ der „reellen Zahlen“.

$$\mathbb{R} = \{a := \pm(a_0 + 0, d_1 d_2 d_3 \dots d_k \mid a_0 \in \mathbb{N}_0, d_k \in \{0, \dots, 9\}\}.$$

Für eine CF rationaler Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird $a \in \mathbb{R}$ als Grenzwert bezeichnet:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt eine „approximierende“ Folge von $a \in \mathbb{R}$. In diesem Sinne hat jede CF rationaler Zahlen nach Konstruktion einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.

Bemerkung 6 (Erinnerung Geometrische Reihe).

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, x \neq 1.$$

Beweis. 1. $\forall a \in \mathbb{R} \exists [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \overline{\mathbb{R}}$

$$a = \pm(a_0 + 0, d_1 d_2 d_3 \dots).$$

definieren wir eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (rationaler) endlicher Teilbrüche:

$$a_n = \pm(a_0, d_1 \dots d_n), a_0 \in \mathbb{N}_0, d_k \in \{0, \dots, 9\}.$$

zu zeigen: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy Folge.

Sei $m > n + 1$, dann

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_0 + 0, d_1 d_2 \dots d_n - (a_0 + 0, d_1 d_2 \dots d_n d_{n+1} \dots d_m)| \\ &= |0, 00 \dots 0 d_{n+1} \dots d_m| \\ &= d_{n+1} 10^{-(n+1)} + \dots + d_m 10^{-m} \\ &\leq 10^{-n} (d_{n+1} 10^{-1} + \dots + d_m 10^{-m+n}) \\ &\leq 10^{-n} (10^0 + \dots + 10^{-m+n+1}) \\ &= 10^{-n} \left(\left(\frac{1}{10} \right)^0 + \dots + \frac{1}{10}^{m-n-1} \right) \\ &= 10^{-n} \frac{1 - \frac{1}{10}^{m-n}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &\leq 10^{-n} \frac{1}{\frac{9}{10}} \\ &= 10^{-n} \frac{10}{9} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$\implies (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy Folge und repräsentiert eine Klasse $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \overline{\mathbb{R}}$
„Einbettung“ $a \mapsto [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$

2. Wir zeigen, dass diese „Einbettung“ bijektiv ist.

a) $a \mapsto [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ ist injektiv ($\forall a, a' \in \overline{\mathbb{R}}$ gilt: aus $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folgt $a = a'$)

Für

$$\begin{aligned} a &= a_0 + 0, d_1 d_2 \dots \\ a' &= a'_0 + 0, d'_1 d'_2 \dots \end{aligned}$$

gilt:

$$\begin{aligned} |a_n - a'_n| &= |a_0 + 0, d_1 \dots d_n - (a'_0 + 0, d'_1 \dots d'_n)| \\ &\leq \epsilon, \forall n \geq n_\epsilon, \forall \epsilon > 0. \end{aligned}$$

$$\implies a = a'$$

b) „Einbettung“ $a \mapsto [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ ist surjektiv

(i) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge

$$\implies z = 0 = 0, 00 \dots$$

(ii) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge Dann fast alle $a_n > 0$ oder fast alle $a_n < 0$ O.B.d.A. $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$

Ziel: $z \geq 0$ zu konstruieren.

Falls $a_n < 0$ (bzw. $-a_n > 0$ konstruiert $-z$)

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \implies \text{beschränkt} \implies \exists N \in \mathbb{N} (N \geq 2) \text{ s.d. } 0 < a_n < N, n \in \mathbb{N}.$$

Dann $\exists z_0 \in \mathbb{N}_0$, s.d. im Intervall:

$$I_0 := \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq z_0 \leq x < z_0 + 1 < n\}.$$

unendlich viele Elemente von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liegen.

□

Heute: Frustcafé (deswegen kürzere Plenarübung)

Nächsten Mittwoch: Vorlesung fällt aus, aber Ersatztermin wird gesucht.

Fortsetzung Beweis:

Beweis. 1. Zz: $\forall [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \overline{\mathbb{R}} \exists z \in \mathbb{R}$

$$z = \pm (z_0 + 0, d_1 d_2 d_3 \dots).$$

O.B.d.A. $z > 0, a_n > 0, n \in \mathbb{N}$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ C.F.} \implies 0 < a_n < N \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\implies z_0 \in \mathbb{N}_0, \text{ s.d. O.B.d.A. } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I_0$$

$$I_0 := \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq z_0 \leq x < z_0 + 1 < N\}.$$

I_0 wird unterteilt in 10 Teilintervalle.

Für ein $d_1 \in \{0, \dots, 9\}$ ein Intervall

$$I_1 := \{x \in I_0 \mid z_0 + d_1 \cdot 10^{-1} \leq x < z_0 + (d_1 + 1) \cdot 10^{-1}\}.$$

Sei $z_1 = z_0 + 0, d_1$, dann

$$I_1 = \{x \in I_0 \mid z_1 \leq x < z_1 + 10^{-1}\}.$$

$$\implies \exists n_1 \text{ Index s.d. } |z_1 - a_{n_1}| \leq 10^{-1}$$

usw. ...

Ergebnis: eine Folge von Teilintervallen

o.B.d.A.

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \dots \subset I_{k+1} \subset I_k \subset \dots \subset I_1 \subset I_0.$$

$$z_k := z_{k-1} + d_k \cdot 10^{-k} \in \mathbb{Q}.$$

$$I_k = \{x \in I_{k-1} \mid z_k \leq x < z_k + 10^{-k}\}.$$

$$\exists n_k : \text{Index s.d. } |z_k - a_{n_k}| \leq 10^{-k}$$

Das heißt für eine Folge

$$z_k := z_0 + 0, d_1 d_2 \dots d_k \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N}.$$

existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von der C.F. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, s.d. $|z_k - a_{n_k}| \leq 10^{-k}, k \in \mathbb{N} \implies (z_k - a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Nullfolge, d.h.

$$\implies (z_k)_{k \in \mathbb{N}} \sim (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$$

$$\implies (z_k)_{k \in \mathbb{N}} \sim (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\implies (z_k)_{k \in \mathbb{N}} \in [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$$

und der resultierende Dezimalbruch ist:

$$z := z_0 + 0, d_1 d_2 \dots d_k \dots \in \mathbb{R}.$$

Wir haben gezeigt:

$$\forall [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \overline{\mathbb{R}}: \exists z \in \mathbb{R}.$$

Damit: $\implies$ Abbildung ist surjektiv und damit bijektiv.

$$\implies \exists \text{ „inverse Abbildung“ } : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

die auch bijektiv ist.

Diese Abbildung ist auch verträglich mit der Addition und der Multiplikation, d.h. $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \mapsto a$ und $[(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}] \mapsto a'$

$$\text{Dann } [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] + [(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}] := a + a'$$

$$[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \cdot [(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}] := a \cdot a'$$

Abbildung $\mathbb{R} \longleftrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist Isomorphismus.

□

Bemerkung 7. Die Darstellung ist durch einen Dezimalbruch ist nicht immer eindeutig. z.B.:

$$0,9999\dots = 0,\overline{9} = 1 = 1,0000\dots$$

Deshalb, falls $z = z_0 + 0, d_1 d_2 \dots d_k 999 d_k \leq 8$ dann:

$$z := z_0 + 0, d_1 d_2 \dots (d_k + 1) 0 \dots$$

Bemerkung 8. Der Satz gilt auch für „b-adische“ Brüche mit Basis $b \in \mathbb{N}, b \geq 2 : a \in \mathbb{R}$ besitzt eine sogenannte „b-adische Entwicklung“:

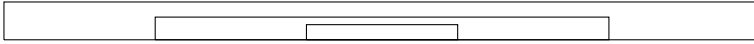
$$a = \pm(a_0 + 0, d_1 d_2 \dots) = \pm(a_0 + d_1 \cdot b^{-1} + d_2 \cdot b^{-2} + \dots).$$

mit $a_0 = g_0 + g_1 \cdot b + g_2 \cdot b^2 + \dots \in \mathbb{N}_0$ mit Ziffern $d_n, g_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ Für $b = 2$: diadische Entwicklung

2.1.1 Zusammenfassung

Beobachtung: Jede reelle Zahl ist ein Grenzwert von einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rationaler Zahlen.

Beispiel: $\sqrt{2}$



$$\forall (a_n), (b_n) \quad a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow a \iff (a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Nullfolge.}$$

Deshalb:

- Definiere C.F. rationaler Zahlen
- Äquivalenzrelation:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}} : \iff (a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Nullfolge .}$$

und Äquivalenzklasse:

$$\overline{R} := \{[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]\}.$$

- Eine Klasse aus $\overline{\mathbb{R}} \iff$ eine reelle Zahl

Konstruktion nach Cantor, 1873

Als nächstes: $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper mit „+“, „·“, „>“ und ist auch „vollständig“.

2.2 Der Körper $\mathbb{R}$

Seien $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zugehörige approximierende Folgen rationaler Zahlen.

Alle Struktureigenschaften von $\mathbb{Q}$ sind über den Grenzübergang auf $\mathbb{R}$ übertragbar.

Definition 11 (Absolutbetrag).

$$|a| := \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|.$$

Folglich: Begriffe „Konvergenz“ und „Cauchy-Folgen“ gelten auch für Folgen reeller Zahlen.

Definition 12 (Arithmetische Grundoperationen).

$$a + b := \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n).$$

$$a \cdot b := \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n).$$

Definition 13 (Ordnungsrelation).

$$a > b : \Longleftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) > 0.$$

und folglich: $\exists \alpha \in \mathbb{Q}_+$ s.d. $a_n - b_n \geq \alpha$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

$$a \geq b : \Longleftrightarrow a > b \text{ oder } a = b.$$

$$a < b : \Longleftrightarrow b > a.$$

$$a \leq b : \Longleftrightarrow b \geq a.$$

Definition 14 (Positivität).

$$\mathbb{R}^+ := \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}.$$

Bemerkung 9. Definitionen sind unabhängig von der Wahl der Folge:

Beispiel für Absolutbetrag. Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei approximierende Folgen von a , d.h. $(a_n - a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

Zu zeigen:

$$|a| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a'_n|.$$

d.h. zu zeigen:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |a'_n| \\ \Longleftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n| - |a'_n|) &= 0. \end{aligned}$$

Betrachte:

$$||a_n| - |a'_n|| \leq |a_n - a'_n| < \epsilon.$$

$$\Rightarrow (|a_n| - |a'_n|) \text{ ist Nullfolge}$$

$$\Rightarrow |a_n| = |a'_n|$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a'_n| = |a|$$

□

Die anderen Beweise folgen analog.

Satz 5 (Der vollständige Körper $\mathbb{R}$). 1. $(\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ ist angeordneter Körper

2. $\mathbb{Q}$ ist Unterkörper von $\mathbb{R}$

3. Der Körper $\mathbb{Q}$ ist vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.

4. Der Unterkörper $\mathbb{Q}$ ist „dicht“ in $\mathbb{R}$, d.h.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists q_\epsilon \in \mathbb{Q} \text{ s.d. } |a - q_\epsilon| < \epsilon.$$

Beweis. 1) Körperaxiome (Kommutativität, Assoziativität, Distributivität) sind trivial

Neutrales Element der Addition:

$$0 := 0, 0 \dots \text{ Klasse der Nullfolgen z.B.: } a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}.$$

Neutrales Element der Multiplikation

$$1 := 1, 0 \dots 0 \quad [(1)_{n \in \mathbb{N}}].$$

Existenz der inversen Elemente bezüglich der Addition

$$a + x = 0, a \in \mathbb{R}.$$

$$x = -a = \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n).$$

Existenz der inversen Elemente bezüglich der Multiplikation

$$b \cdot x = 1, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$x = \frac{1}{b} := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

$$(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = ?.$$

$$b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$$

$$\implies (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ keine Nullfolge} \implies \text{fast alle Elemente } b_n \neq 0 \text{ (Übung!)}$$

Definiere:

$$c_n := \begin{cases} 0 & b_n = 0 \\ \frac{1}{b_n} & b_n \neq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Dann } (b_n \cdot c_n) =$$

$$(b_n \cdot c_n) = \begin{cases} 0 & b_n = 0 \\ 1 & b_n \neq 0 \end{cases}.$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n \cdot c_n) = 1$$

- 2) $a \in \mathbb{Q}$ entspricht $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ mit $a_n = a \forall n \in \mathbb{N} \implies \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ Körper
 $\implies \mathbb{Q}$ Unterkörper von $\mathbb{R}$.

- 3) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine C.F. reeller Zahlen.

$$\forall a_n \in \mathbb{R} \exists \text{ approx. Folge } (a_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}.$$

$$a_{n,m} \in \mathbb{Q} \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

$$a_n := \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n,m} \in \mathbb{R}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ wähle $k_n \in \mathbb{N}$ mit:

$$|a_n - a_{n,k_n}| < \frac{1}{n}.$$

Wir zeigen, dass $(a_{n,k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ rationaler Zahlen eine C.F. ist.

Sei $\epsilon > 0$. Dann

□

Bemerkung 10 (Organisatorisches). Nächsten Mittwoch (20. November) findet keine Vorlesung und auch keine Plenarübung statt. Aber Mittwoch (27.11.) Vorlesung statt Plenarübung im großen Hörsaal Chemie

Satz 6 (Wichtiger Satz). Der Körper $\mathbb{R}$ ist vollständig, d.h. jede Cauchy Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Limes

Beweis. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge reeller Zahlen, d.h. $a_n \in \mathbb{R}$.

$$a_n \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : \exists \text{ C.F. } (a_{n,m}).$$

$$a_{n,m} \in \mathbb{Q} \forall n, m \in \mathbb{N}, a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n,m}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ wähle Index $k_n \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_{n,k_n}| < \frac{1}{n}.$$

k_n existiert, weil $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{n,m} = a_n$ und damit $|a_n - a_{n,m}| \rightarrow 0$ also $\exists \epsilon |a_n - a_{n,m}| < \epsilon < \frac{1}{n}$ und Archimedisches Axiom.

Ziel: zu zeigen $(a_{n,k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ rationaler Zahlen ist Cauchy Folge.

Sei $\epsilon > 0$. Dann $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n, m \geq n_\epsilon$:

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &< \frac{1}{3}\epsilon, |a_n - a_{n,k_n}| < \frac{1}{3}\epsilon \\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{C.F.} \\ |a_m - a_{m,k_m}| &< \frac{1}{3}\epsilon \text{ (AA).} \end{aligned}$$

und folglich

$$|a_{n,k_n} - a_{m,k_m}| \leq |a_{n,k_n} - a_n| + |a_n - a_m| + |a_m - a_{m,k_m}| < \epsilon.$$

$\implies (a_{n,k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy Folge $\implies$ Nach Konstruktion der $\mathbb{R}$ folgt, dass $\exists$ „limes“ $a \in \mathbb{R}$, s.d.

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\epsilon : |a_{n,k_n} - a| < \epsilon.$$

Dann gilt für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n,k_n}| + |a_{n,k_n} - a| \leq \frac{1}{n} + |a_{n,k_n} - a| \rightarrow 0.$$

$$\implies a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, d.h.

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ gilt } \forall \epsilon > 0 \exists q_\epsilon \in \mathbb{Q} \text{ s.d. } |a - q_\epsilon| \leq \epsilon.$$

Nach Konstruktion von $\mathbb{R}$ folgt:

$$\begin{aligned} \forall \text{C.F. } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Q} : \\ \exists a \in \mathbb{R} : a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n. \end{aligned}$$

$$\implies \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon |a_n - a| < \epsilon \forall n \geq n_\epsilon$$

□

Bemerkung 11 (Archimedisches Axiom).

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : \text{s.d. } n - a > 0 \\ \implies \forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.d. } n - \frac{1}{\epsilon} > 0 \\ \implies \frac{1}{n} < \epsilon. \end{aligned}$$

2.3 Wichtige Aussage

$\mathbb{R}$ ist vollständig, da alle C.F. in $\mathbb{R}$ haben einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.

2.4 Weitere Möglichkeiten, die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zu charakterisieren

Definition 15 (Maximum, Minimum, obere/untere Schranke, Supremum, Infimum). Sei $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$.

Maximum:

$$\max M := b \in M : b \geq x, \forall x \in M.$$

Minimum:

$$\min M := a \in M : x \geq a, \forall x \in M.$$

Obere Schranke:

$$b \in \mathbb{R}, \text{ s.d. } b \geq x, \forall x \in M.$$

Untere Schranke:

$$a \in \mathbb{R}, \text{ s.d. } x \geq a, \forall x \in M.$$

Eine Menge M heißt nach oben (unten) beschränkt, falls eine obere (untere) Schranke von M existiert.

Supremum: kleinste obere Schranke

Infimum: größte untere Schranke

Beispiel 6. • $\mathbb{N}$ ist von unten beschränkt, z.B. mit 0. $\min \mathbb{N} = 1$, von oben unbeschränkt.

- $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$: obere Schranke ist $\sqrt{2}$ und untere Schranke ist $-\sqrt{2}$, aber M besitzt kein Maximum bzw. Minimum. $\sqrt{2}$ ist Supremum und $-\sqrt{2}$ ist Infimum

Bemerkung 12. Falls $b = \sup M \iff$:

1. b ist eine obere Schranke von M , d.h. $\forall x \in M : x \leq b$ und
2. Jede Zahl $c < b$ ist keine obere Schranke von M , d.h. $\forall c \in M, c < b, \exists x \in M : c < x$ (oder $\forall \epsilon > 0 \exists x \in M : x > b - \epsilon$)

Analog für $a = \inf M$

Beispiel 7.

$$I = (a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

dann gilt $\sup I = b, \inf I = a$.

Bemerkung 13. Das Supremum (Infimum) muss nicht zur Menge M gehören, aber falls $\sup M \in M$, dann $\sup M = \max M$.

Satz 7 (Vollständigkeit in $\mathbb{R}$ Nr. 2). $\mathbb{R}$ vollständig $\iff$ jede nichtleere beschränkte Teilmenge $M \in \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum bzw. Infimum

Definition 16 (Intervalle).

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall.

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offenes Intervall.

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ halboffenes Intervall.

$[a, b)$ analog.

Definition 17 (Intervallschachtelung). ist eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_n := [a_n, b_n] := \{x \in \mathbb{R} \mid a_n \leq x \leq b_n\}, n \in \mathbb{N}$ mit Eigenschaften. 1) $I_{n+1} \subset I_n, n \in \mathbb{N}$ (bedeutet $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$) 2) $\forall \epsilon > 0, \exists I_n$ mit der Länge

$$|b_n - a_n| < \epsilon \text{ d.h. } |b_n - a_n| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Satz 8 (Vollständigkeit in $\mathbb{R}$ Nr. 3). Vollständigkeit in $\mathbb{R} \iff$ Intervallschachtelungseigenschaft d.h. für jede Intervallschachtelung.

$$(I_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}$$

so dass

$$c = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n := \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I_n \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Diese Aussage ist verwandt mit dem Axiom vom Dedekindschen Schnitt

Satz 9 (Trennungseigenschaft). Seien $A, B \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ mit $a < b \forall a \in A, b \in B$

Dann existiert immer ein $c \in \mathbb{R}$, welches A und B trennt:

$$\forall a \in A, b \in B \text{ gilt } a \leq c \leq b.$$

Dies ist ebenfalls $\iff$ zur Vollständigkeit in $\mathbb{R}$

Lemma 4 (Existenz der k -ten Wurzel einer positiven reellen Zahl). $\forall a \in \mathbb{R}^+ \forall k \in \mathbb{N}$: existiert eine positive k -te Wurzel. Das heißt die Lösung der Gleichung

$$x^k = a.$$

ist $\sqrt[k]{a}$ (Bezeichnung).

Beweis. 1) Die Eindeutigkeit der $\sqrt[k]{a}$ (falls sie existiert)

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zwei k -te Wurzeln des $a \in \mathbb{R}^+$:

$$x_1^k = a = x_2^k.$$

Dann gilt:

$$0 = x_1^k - x_2^k = (x_1 - x_2) \underbrace{\sum_{m=0}^{k-1} x_1^{k-1-m} x_2^m}_{>0}.$$

mit dieser Hilfsformel

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k.$$

$$\implies x_1 - x_2 = 0 \implies x_1 = x_2$$

2) Existenz: $a = 1 \implies \sqrt[k]{1} = 1$ ($1^k = 1$) Sei $a > 1$ und Annahme, dass $\exists$ Wurzel für $0 < a' < 1$
Dann definiere:

$$\sqrt[k]{a} := \frac{1}{\sqrt[k]{\frac{1}{a}}}.$$

$$(\sqrt[k]{a})^k = \left(\frac{1}{\sqrt[k]{a'}} \right)^k = \frac{1}{\sqrt[k]{a'^k}} = \frac{1}{a'} = a.$$

Es bleibt zu zeigen: $\exists \sqrt[k]{a}$ für $0 < a < 1$. □

Heute: Längstes deutsches Wort!

„Intervallschachtelungseigenschaft hat ganze 33 Buchstaben“ meint Kostina.

Fortsetzung des Beweises vom letzten Mal. Ab jetzt: n statt k .

Zu zeigen: Es existiert eine Wurzel für $0 < a < 1$.

Definiere Menge $M := \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < 1, y^n < a\}$

$M \neq \emptyset$, weil $\frac{1}{2}a \in M$. M ist auch beschränkt, untere Schranke 0, obere Schranke 1.

Da $\mathbb{R}$ vollständig $\implies \exists \sup M =: x$.

Zu zeigen: $x^n = a$ Annahme: $x^n < a$. Wegen $(x+1) \notin M$ gilt $(x+1)^n > a$. Konstruiere:

$$\tau := \frac{\overbrace{a - x^n}^{>1}}{(x+1)^n - x^n}.$$

$$\begin{aligned} (x+\tau)^n &= x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \tau^k x^{n-k} \\ &< x^n + \tau \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \\ &= x^n + \tau((x+1)^n - x^n) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} x^n + (a - x^n) = a. \end{aligned}$$

$\implies$

$$(x + \tau)^n < a \implies (x + \tau) \in M.$$

und damit:

$$x + \tau > x \quad \text{Widerspruch zu } x = \sup M.$$

(folgt aus der binomischen Formel: $(x + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k}$)

Annahme: $x^n > a$

Nach der Ungleichung von Bernoulli gilt für $\tau := \frac{x^n - a}{nx^n}$. ($0 < \tau < \frac{x^n - a}{x^n} < 1$) Damit:

$$\begin{aligned} (x - \tau x)^n &= x^n(1 - \tau)^n \geq x^n(1 - n\tau) \\ &= x^n \left(1 - \frac{x^n - a}{x^n} \right) = a. \end{aligned}$$

$\implies$ Für $y \in M$ gilt:

$$y^n < a < (x - \tau x)^n.$$

$\implies$

$$0 < (x - \tau x)^n - y^n = \underbrace{(x - \tau x - y) \sum_{k=0}^{n-1} (x - \tau x)^{n-1-k} y^k}_{>0}.$$

$\implies x - \tau x - y > 0$

$\implies y < x - \tau x < x \implies x - \tau x < x$ eine obere Schranke von M . Widerspruch zu $x = \sup M$

(Formel: $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$) □

Bemerkung 14 (Ungleichung von Bernoulli). Sei $x \geq -1$, dann gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \forall n.$$

Definition 18 (Allgemeine rationale Potenzen). $a^q, q = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}, a > 0, a \in \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$a^q = a^{\frac{r}{s}} := \left(\sqrt[s]{a} \right)^r.$$

Bemerkung 15. • Regeln für das Rechnen mit Wurzeln

$$\left(\sqrt[s]{a} \right)^r = \left(a^{\frac{1}{s}} \right)^r = a^{\frac{r}{s}} = \left(a^r \right)^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{a^r}.$$

- Für $a \in \mathbb{R}_+$ wird unter $\sqrt[k]{a}$ **immer** die positive k -te Wurzel verstanden.

$\implies$ Aussage $\sqrt{a^2} = a$ ist falsch.

Korrekt: $\sqrt{a^2} = |a|$

Die Gleichung $x^2 = a$ hat zwei Lösungen: $x_1 = \sqrt{a}, x_2 = -\sqrt{a}$

Bemerkung 16 (Reelle Potenzen). $a \in \mathbb{R}_+, r \in \mathbb{R}, a^r$ - ?

$\exists (q_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow r, q_n \in \mathbb{Q}$, damit:

$$a^r := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n}.$$

Noch zu überprüfen: ob der Grenzwert existiert und eindeutig ist

Beispiel 8. $\sqrt{2}, (q_n) = \{1.4, 1.41, 1.414, \dots\}$

$$a^{\sqrt{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{q_n}, a_1 = a^{1.4}, a_2 = a^{1.41}, \dots$$

Analog über Intervallschachtelung:

$$I_1 = [1.4; 1.5]$$

$$I_2 = [1.41; 1.42]$$

$$I_3 = [1.414; 1.415]$$

$$I_n = [r_n, s_n].$$

$$a^{\sqrt{2}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{I_n}.$$

Alternative Definition über $\exp$ und $\ln$

$$a^r = \exp(r \ln a).$$

und Reihenentwicklung:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

oder

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

2.5 Mächtigkeit von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

Definition 19 (Mächtigkeit). Die Mächtigkeit einer Menge ist die Anzahl ihrer Elemente.

Eine Menge ist „unendlich“, wenn eine bijektive Abbildung $f : A \rightarrow$ Echte Teilmenge von A existiert. Dann $|A| = \infty$.

Eine unendliche Menge, deren Elemente mit Hilfe der natürlichen Zahlen durchnummeriert werden kann, heißt „abzählbar (unendlich)“, sonst „überabzählbar“.

Abzählbarkeit heißt: Es existiert eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow A$.

Beispiel 9. • $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ dann $|A| = 3$

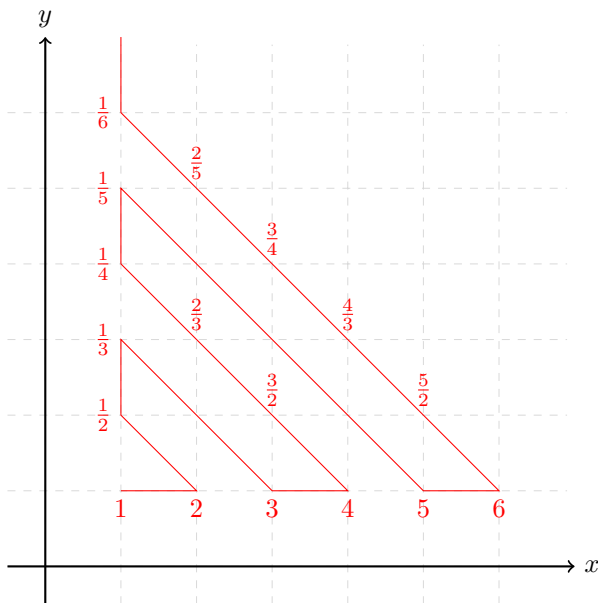
• $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sind unendliche Mengen

Satz 10 (Abzählbarkeit). $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar, $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

$\mathbb{Z}$ Abzählbar. $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, weil $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $z_n = \frac{1}{2}n$ für n gerade und $z_n = \frac{1}{2}(1-n)$ für n ungerade ist eine Abzählung von $\mathbb{Z}$. $\square$

$\mathbb{Q}$ Abzählbar. Argumentation nach Cantor

$p \in \mathbb{Q}, q = \frac{n}{m}$



Hier werden Punkte ausgelassen, für die n und n nicht teilerfremd sind. Die Gitterpunkte werden durchnummeriert $\Rightarrow \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, \dots\}$. $\square$

$\mathbb{R}$ ist überabzählbar. Wir zeigen, dass $[0, 1)$ nicht abzählbar ist.

Angenommen: $[0, 1)$ ist abzählbar, dann sei $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung, z.B.:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, d_{11}d_{12}d_{13} \dots \\ z_2 &= 0, d_{21}d_{22}d_{23} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dann Zahl $y := 0, d_1d_2d_3, \dots$ mit

$$d_n := \begin{cases} 2 & \text{falls } d_{nn} = 1 \\ 1 & \text{falls } d_{nn} \neq 1 \end{cases}$$

liegt in $[0, 1)$, $d_i \neq 9 \forall i$, aber $y \notin \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, denn falls $y = z_k$ für ein $k \implies$

$$y = 0, d_{k1}, d_{k2}, d_{k3}, \dots, d_{kk}, \dots$$

aber $d_k \neq d_{kk}$ nach Konstruktion. □

2.6 Die Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{z = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Addition in $\mathbb{C}$: $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$, $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$:

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Multiplikation in $\mathbb{C}$:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Satz 11 ($\mathbb{C}$ ist ein Körper). Körperaxiome gelten (nachrechnen!)

Nullelement $0 := (0, 0)$

Einselement $1 := (1, 0)$

Imaginäre Einheit $i := (0, 1)$ mit $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$

Inverse der Addition $-z := (-x, -y)$

Inverse der Multiplikation $z^{-1} := \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$

Schreibweise / Normaldarstellung

$z = (x, y)$ oder $z = x + iy$ mit $i^2 = -1$.

Bemerkung 17 (Rechnen in $\mathbb{C}$).

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i^2y_1y_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2).$$

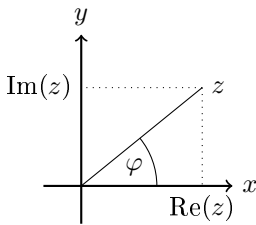
Definition 20. Für $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$ heißt

$x = \operatorname{Re}(z)$ Realteil von z

$y = \operatorname{Im}(z)$ Imaginärteil von z

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ Betrag von z

$\bar{z} := x - iy = (x, -y)$ zu z konjugierte komplexe Zahl



$$\operatorname{Re}(z) = |z| \cos(\varphi)$$

$$\operatorname{Im}(z) = |z| \sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi} \text{ mit } r = |z|.$$

Bemerkung 18. Rechenregeln für komplexe Zahlen

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{\bar{z}} = z$
2. $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{i}{2}(z - \bar{z})$
3. $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \iff z = 0$
4. $|\bar{z}| = |z|$
5. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
6. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

Reelle Zahlen: $z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(z) = 0 \iff z = \bar{z}$

Dies führt zur weiteren Darstellung komplexer Zahlen mit Hilfe von sin und cos.

Polardarstellung

(a)

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad r = |z|.$$

$$\text{Bsp.: } i = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

(b) Definiere $e^{iy} := \cos y + i \sin y$ $y \in \mathbb{R}$. Es folgt eine *Exponentialdarstellung*.

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \text{ mit } r = |z| \quad \varphi = \operatorname{Arg}(z).$$

Satz 12 (Vorteil der Exponentialdarstellung). Für $z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$z_k = r_k e^{i\varphi_k} \quad k = 1, 2 \text{ gilt.}$$

(a) $\bar{z} = r \cdot e^{-i\varphi}$

(b) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

(c) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

(d) $z^n = r^n e^{in\varphi}$

insbesondere gilt die Formel von de Moivre:

$$(e^{i\varphi})^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) = e^{in\varphi}.$$

Beweis. (a) $\bar{z} = \overline{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = r \cdot e^{-\varphi}$

(b)

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i ((\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

(c) folgt aus 2

(d) folgt aus 2

□

tolle Grafik von der Kostina, die gibt's nur in der Vollversion.

Bemerkung 19 (Beobachtungen). 1. $e^{i\varphi} = 1 \iff \varphi \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis. durch Behauptung.

□

2. $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \iff \varphi_1 - \varphi_2 \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Satz 13 (n -te Wurzel in $\mathbb{C}$). Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \neq w = re^{i\varphi}$ hat die Gleichung $z^n = w$ genau n verschiedene Lösungen.

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\varphi + 2\pi k) \cdot \frac{1}{n}} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Beweis. Sei $z = \rho e^{i\psi}$. Dann:

$$\begin{aligned} z^n &= \rho^n e^{in\psi} \stackrel{!}{=} r e^{i\varphi} = w \\ \iff \rho^n &= r \text{ und } n\psi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \iff \rho &= \sqrt[n]{r} \text{ und } \psi = \frac{1}{n}(\varphi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Betrachte: $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\psi_k}, \psi_k = \frac{1}{n}(\varphi + 2\pi k), k = 0, 1, \dots, n-1$

1. Alle z_k sind paarweise verschieden (klar).

2. Wir zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt. Sei z eine beliebige Lösung $z^n = w$ und $z = |z| \cdot (\cos \psi + i \sin \psi)$. Es gilt $|z|^n = |w|$ und folglich $|z| = \sqrt[n]{|w|} = \sqrt[n]{r}$.

Weiterhin ist $n\psi = \varphi + 2\pi l$ für ein $l \in \mathbb{Z}$ (wegen $(e^{i\psi})^n = e^{in\psi}$), dann $\psi = \frac{\varphi}{n} + l \frac{2\pi}{n}$.

Teile l durch n mit Rest: $l = k + s \cdot n$.

$$\frac{l}{n} = s + \frac{k}{n}, s \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n-1.$$

Dann

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}(k + sn) = \underbrace{\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)}_{\psi_k} + 2\pi s.$$

$$\implies z = z_k, 0 \leq k \leq n-1$$

$\implies$ Alle Lösungen gefunden

□

Bemerkung 20 (Geometrische Interpretation). Die Lösungen sind die Ecken eines regelmäßigen n -Ecks auf dem Kreis mit Radius $|z| = \sqrt[n]{r}$.

Im Fall $w = 1$ heißen z_k die n -ten Einheitswurzeln.

Beispiel 10. Die dritten Einheitswurzeln sind

$$\begin{aligned} & \left\{ e^{i2k\pi\frac{1}{3}}, k = 0, 1, 2 \right\} \\ &= \left\{ \cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(k\frac{2\pi}{3}\right), k = 0, 1, 2 \right\} \\ &= \left\{ 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}. \end{aligned}$$

3 Folgen und Reihen

3.1 Folgen

Eine Zahlenfolge ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$, d.h. $n \mapsto a_n \in \mathbb{R}$.

Teilfolge: $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wobei $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen, welche streng monoton wächst, d.h. $n_1 < n_2 < \dots$ bzw. $n_k < n_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$

Beispiel 11. $(-1)^n$ hat zwei Teilfolgen: $(-1)^{2n} = 1$ und $(-1)^{2n+1} = -1$.

Definition 21 (Konvergenz, Beschränktheit, Monotonie von Folgen). 1. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $|a_n| \leq C$.

Sie heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt falls $\exists C \in \mathbb{R}$, s.d. $a_n \leq C$ (bzw. $a_n \geq C$) $\forall n \in \mathbb{N}$

2. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt monoton wachsend (fallend), wenn $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$, s.d.

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon.$$

4. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt divergent, falls sie gegen keine reelle Zahl konvergiert.

Bemerkung 21. 1. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ falls in jeder ϵ -Umgebung $]a - \epsilon, a + \epsilon[$ fast alle Folgeelemente liegen.

2. In Def. kann auch $\leq \epsilon$ und statt ϵ kann man $\frac{1}{N}$ für beliebig große $N \in \mathbb{N}$ schreiben.

Satz 14. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn sie Cauchy-Folge ist, d.h. $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall n, m \geq n_\epsilon$ gilt: $|a_n - a_m| < \epsilon$.

Satz 15 (Eindeutigkeit des Limes). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a, a' \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a'$, dann gilt $a = a'$.

Beweis. Angenommen $a \neq a'$. Definiere $\epsilon := \frac{|a-a'|}{2} > 0$.

Dann $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_1$ und $|a_n - a'| < \epsilon \quad \forall n \geq n_2$.

Dann $\forall n \geq \max\{n_1, n_2\}$ gilt:

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < \epsilon + \epsilon = |a - a'|.$$

$$\implies |a - a'| < |a - a'|. \text{ Widerspruch } \implies a = a'$$

□

Satz 16. Konvergente Folgen sind beschränkt.

Beweis. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty, a \in \mathbb{R}$.

Wähle $\epsilon = 1$. Dann $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1 \quad \forall n \geq n_\epsilon$.

Dann gilt $\forall n \geq n_\epsilon$:

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|.$$

$$\implies |a_n| \leq \left(\max_{k=1, \dots, n_\epsilon} |a_k| \right) + |a| + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Satz 17 (Konvergenz und Nullfolgen). Eine Nullfolge ist eine Folge, die gegen Null konvergiert. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Dann sind äquivalent:

1. $a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty$
2. $(a_n - a) \rightarrow 0$
3. $|a_n - a| \rightarrow 0$

Beweis. durch Behauptung.

□

Satz 18 (Konvergenz von Teilfolgen). Teilfolgen einer gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergierenden Folge konvergieren ebenfalls gegen $a \in \mathbb{R}$.

Beweis. trivial.

□

Satz 19 (Einschließungskriterium (Sandwich)). Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$.

1. Falls $a_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies a \leq c$.
2. Falls $a = c$ und $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies b = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$.

1. $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ und $|c_n - c| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_\epsilon$.

$$\text{Dann: } a - c \leq a - (a_n - c_n) - c \leq |a - a_n| + |c_n - c| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$$

$$\implies \forall \epsilon > 0 \text{ gilt } a - c < \epsilon \implies a - c \leq 0$$

2. $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$ und $|c_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$

Dann gilt $\forall n \geq n_\epsilon$ und wegen $|a_n| \leq |b_n| \leq |c_n|$:

$$-\epsilon < -|a_n - a| \leq a_n - a \leq b_n - a \leq c_n - a \leq |c_n - a| < \epsilon.$$

$$\implies -\epsilon < b_n - a < \epsilon \implies |b_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$$

□

Satz 20 (Rechenregeln für konvergente Folgen). Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann gilt:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$
4. Falls $b \neq 0$, gilt $b_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.
5. Falls $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies a \geq 0$ und $(a_n)^{\frac{1}{k}} \rightarrow a^{\frac{1}{k}}, n \rightarrow \infty$.

Beweis. durch Zurückblättern.

□

Satz 21 (monoton + beschränkt $\implies$ konvergent). Eine monoton wachsende (fallende) nach oben (unten) beschränkte Folge konvergiert gegen ihr Supremum:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = \min\{c \in \mathbb{R} | a_n \leq c\}.$$

bzw. ihr Infimum:

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n := \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = \max\{c \in \mathbb{R} | a_n \geq c\}.$$

Beweis. Gegeben $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Definiere $s := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

Z.z.: $a_n \rightarrow s$. Sei $\epsilon > 0$. Dann $s - \epsilon$ keine obere Schranke, d.h. $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $s - \epsilon < a_{n_\epsilon}$.

Damit $s - \epsilon < a_{n_\epsilon} \leq a_n \leq s < s + \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$

$$\implies |a_n - s| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon \implies a_n \rightarrow s$$

□

Satz 22 (Bolzano-Weierstraß). Jede beschränkte Folge besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, d.h. $\exists a, b \in \mathbb{R}$, s.d. $a \leq a_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Konstruiere induktiv eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_k := [a_k, b_k]$ mit:

- (1) I_k enthält unendlich viele Folgeelemente von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (2) $I_k \subset I_{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$
- (3) $(b_k - a_k) \leq 2^{1-k}(b_1 - a_1) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Für $k = 1$ wähle $a_1 := a, b_1 := b$.

$k \rightarrow k + 1$: Intervall $I_k := [a_k, b_k]$ mit Eigenschaften (1)-(3) sei konstruiert.

Berechne $M := \frac{a_k + b_k}{2}$ (Mitte des Intervalls I_k). Wegen (1): $[a_k, M]$ oder $[M, b_k]$ enthält unendlich viele Folgeelemente.

Setze:

$$I_{k+1} := \begin{cases} [a_k, M] & \text{falls } [a_k, M] \text{ unendlich viele Folgelemente enthält} \\ [M, b_k] & \text{falls } [M, b_k] \text{ unendlich viele Folgelemente enthält} \end{cases}$$

in beiden Fällen:

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2} \stackrel{(3)}{\leq} \frac{1}{2} 2^{1-k} (b_1 - a_1) = 2^{-k} (b_1 - a_1).$$

$\implies$ (1) - (3) erfüllt für I_{k+1} .

Wir definieren eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \in I_k \ \forall k \in \mathbb{N}$:

$k = 1$: Setze $a_{n_1} := a, n_1 := 1$.

$k \rightarrow k+1$: Wegen (1) ex. ein Index $n_{k+1} > n_k$ mit $a_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$.

I_k bilden eine Intervallschachtelung:

$$\implies \underbrace{a_k}_{\rightarrow a} \leq a_{n_k} \leq \underbrace{b_k}_{\rightarrow a} \stackrel{\text{Sandwich}}{\implies} a_{n_k} \rightarrow a, k \rightarrow \infty.$$

□

Beispiel 12. $a_n = (-1)^n$. Teilfolge: $(1, 1, 1, 1, \dots) \rightarrow 1, (-1, -1, -1, \dots) \rightarrow -1$.

Definition 22 (Häufungspunkt). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann heißt $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt der Folge, falls $\forall \epsilon > 0$ gilt $|a_n - a| < \epsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 13. 1. $a_n = (-1)^n$ hat zwei Häufungspunkte 1 und -1 .

2. Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, dann ist a Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Bemerkung 22. Zu jedem Häufungspunkt a ex. eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert, also $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$:

$$a \text{ Häufungspunkt} \iff a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \text{ für eine } (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}.$$

Beweis. (i) „ $\implies$ “: Sei a Häufungspunkt (HP). Wähle $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_1} \in D_1(a) = \{x \mid |x - a| < 1\}$.

Sei $n_1, \dots, n_{k-1}$ bereits gewählt.

Wähle $n_k > n_{k-1}$, s.d. gilt:

$$a_{n_k} \in D_{\frac{1}{k}}(a) = \left\{x \mid |x - a| < \frac{1}{k}\right\}.$$

Dann ist $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge, $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$.

$\implies a_{n_k} \rightarrow a, k \rightarrow \infty$.

(ii) „ $\impliedby$ “: Sei $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Zu zeigen: a ist HP.

Sei $\epsilon > 0$. Dann ex. $k_\epsilon \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall k \geq k_\epsilon$ gilt:

$$|a_{n_k} - a| < \epsilon \implies \forall k \geq k_\epsilon \quad a_{n_k} \in D_\epsilon(a).$$

□

Bemerkung 23. Satz von Bolzano-Weierstraß besagt, dass jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ mindestens einen HP besitzt.

Definition 23 (Limes Superior). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, dann definiere eine reelle Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $s_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\}$.

$(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend. Ist $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach unten beschränkt, dann definiere

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

Falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt ist, setze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n := +\infty$.

Falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, aber $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *nicht* nach unten beschränkt ist, setze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n := -\infty$.

Beispiel 14. 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = a$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup (-1)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{(-1)^k \mid k \geq n\} = 1$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup n = +\infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup (-n) = -\infty$

Definition 24 (Limes Inferior). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann setze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n := - \lim_{n \rightarrow \infty} \sup (-a_n).$$

Beispiel 15. 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup (n^2) = +\infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf (n^2) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{-k^2 \mid k \geq n\} = - \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = +\infty$

2.

$$a_n := \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

$$(a_n) = (0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = +\infty$$

Satz 23 (Charakterisierung von $\lim \sup$ und $\lim \inf$). Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = a \in \mathbb{R} \iff$
 $\forall \epsilon > 0$ gilt:

- (i) $a_n < a + \epsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) $a_n > a - \epsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n = a \in \mathbb{R} \iff$
 $\forall \epsilon > 0$ gilt:

- (i) $a_n > a - \epsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$
- (ii) $a_n < a + \epsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

3. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n = a \in \mathbb{R}.$$

In diesem Fall gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Bemerkung 24. Satz 23 impliziert:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n &= \sup \{\text{HP von } (a_n)_{n \in \mathbb{N}}\} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n &= \inf \{\text{HP von } (a_n)_{n \in \mathbb{N}}\}. \end{aligned}$$

$\forall \epsilon > 0$ liegen unendlich viele Folgelemente im offenen Intervall

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n \right) - \epsilon < a_n < \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n \right) + \epsilon \quad (1 \text{ (i) (ii)}).$$

bzw.

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \right) - \epsilon < a_n < \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \right) + \epsilon \quad (2 \text{ (i) (ii)}).$$

Fast alle Folgelemente erfüllen:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \right) - \epsilon < a_n < \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \right) + \epsilon \quad (1 \text{ (i) und } 2 \text{ (i)}).$$