Aufgabe	A22	A23	A24	A25	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 22. Im Folgenden seien freie Stellen in Matrizen 0.

(a) Aus Aufg. 17 folgt $c_1(A) = c_2(A) = 1$, $c_3(A) = t - 2$ und $c_4(A) = (t+1)(t-2)^2$. Damit folgen die Weierstraßteiler $h_1 = t - 2$, $h_2 = t + 1$ und $h_3 = (t-2)^2$. Damit folgt

$$A \approx B_{h_1,h_3,h_2} \approx \begin{pmatrix} J(2,1) & & \\ & J(2,2) & \\ & & J(-1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & 0 & \\ & 1 & 2 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Aus Aufg. 20 folgen direkt die Weierstraßteiler $h_1 = t+1$, $h_2 = t$, $h_3 = t+1$, $h_4 = t^2$, $h_5 = (t+1)^3$. Damit folgt

$$A \approx B_{h_2,h_4,h_1,h_3,h_5} \approx \begin{pmatrix} J(0,1) & & & & \\ & J(0,2) & & & \\ & & J(-1,1) & & \\ & & & J(-1,1) & \\ & & & & J(-1,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 0 & 0 & & & & & \\ & 1 & 0 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & -1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 23. Seien R ein Ring, $I \subseteq R$ Ideal und M ein R-Modul.

Äquivalenzklassen bezügl. beliebiger Äquivalenzrelationen seien im folgenden mit $\bar{\cdot}$ bezeichnet. Aus dem Argument ist immer klar, welche Äquivalenzrelation gemeint ist.

(a) Skalare Multiplikation $(*)$:

$$\begin{aligned} R/I \times M/IM &\to M/IM \\ (\overline{a}, \overline{m}) &\mapsto \overline{a} \cdot \overline{m} := \overline{a \cdot m} \quad (*). \end{aligned}$$

Beh.: M/IM ist mit der natürlichen Addition und der angegebenen skalaren Mult. $(*)$ R/I-Modul.

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, dass $(*)$ wohldefiniert ist. Dazu seien $a, b \in R$ und $x, y \in M$ mit $a + I = b + I$ und $x + IM = y + IM$.

- Zunächst ist ax bzw. by wohldefiniert, da M R-Modul.
- Es ist $x - y \in IM$, also $ax - ay = \underbrace{a}_{\in R}\underbrace{(x-y)}_{\in IM}$. Da IM R-Untermodul von M, folgt $a(x-y) \in IM$ und damit $\overline{ax} = \overline{ay}$.
- Es ist $a - b \in I$, also $ax - bx = \underbrace{(a-b)}_{\in I}\underbrace{x}_{\in M} \in IM$. Damit folgt $\overline{ax} = \overline{bx}$.

(M1) M/IM ist nach VL R-Modul, da IM R-Untermodul von M, also insbesondere abelsche Gruppe: $(M/IM, +, IM)$.

(M2) Seien $\overline{a}, \overline{b} \in R/I$ und $\overline{x}, \overline{y} \in M/IM$. Damit folgt

$$(\overline{a} + \overline{b})\overline{x} = \overline{a+b}\,\overline{x} \overset{(*)}{=} \overline{(a+b)x} \overset{M\ R\text{-Modul}}{=} \overline{ax + bx} = \overline{ax} + \overline{bx} \overset{(*)}{=} \overline{a}\,\overline{x} + \overline{b}\,\overline{x}.$$

Der Rest lässt sich analog nachrechnen.

□

(b) Beh.: Ist $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi\colon M \to R^n$ ein R-Modulisomorphismus, dann ist $\varphi|_{IM}\colon IM \to I^n$ eine Bijektion (i) und φ induziert einen R/I - Moduliso. $\overline{\varphi}\colon M/IM \to (R/I)^n$ (ii).

Beweis. (i) • Z.z.: $\varphi|_{IM}$ wohldefiniert. Sei $m \in IM$ dann ex. Indexmenge J und $(a_i)_{i\in J} \in I^{(J)}$ und $(m_i)_{i\in J} \in M^{(J)}$ mit

$$m = \sum_{i\in J} a_i m_i \implies \varphi(m) \overset{\varphi R\text{-Hom}}{=} \sum_{i\in J} \underbrace{a_i}_{\in I} \underbrace{\varphi(m_i)}_{\in R^n} \in I^n \quad \text{(da } I \text{ Ideal).}$$

• Sei $x \in I^n$. Z.z.: $\varphi^{-1}(x) \in IM$. Es ex. $(a_i)_{i=1}^n \in I^n$ mit

$$x = \sum_{i=1}^n a_i e_i \implies \varphi^{-1}(x) \overset{\varphi^{-1} R\text{-Hom}}{=} \sum_{i=1}^n \underbrace{a_i}_{\in I} \underbrace{\varphi^{-1}(e_i)}_{\in M} \in IM.$$

Also φ_{IM} surjektiv.

• Da φ Iso, inbes. bijektiv, ist $\varphi|_{IM}$ injektiv.

Damit folgt also $\varphi|_{IM}$ bijektiv.

(ii) Definiere $\overline{\varphi}\colon M/IM \to (R/I)^n = R^n/I^n, m + IM \mapsto \varphi(m) + I^n$.

• Z.z: $\overline{\varphi}$ wohldefiniert. Seien $m_1, m_2 \in M$ mit $m_1 = m_2$. Dann folgt $m_1 - m_2 \in IM$. Also ex. ein $(a_i)_{i\in J} \in I^{(J)}$ und $(m_i)_{i\in J} \in M^{(J)}$ mit $m_1 - m_2 = \sum_{i\in J} a_i m_i$. Damit folgt

$$\varphi(m_1) - \varphi(m_2) = \varphi(m_1 - m_2) \overset{\varphi\ R\text{-Hom}}{=} \sum_{i\in J} \underbrace{a_i}_{\in I} \underbrace{\varphi(m_i)}_{\in R^n} \in I^n.$$

Also ist $\varphi(m_1) + I_n = \varphi(m_2) + I_n$, also $\overline{\varphi}$ wohldefiniert.

• Z.z.: $\overline{\varphi}$ R/I-Homomorphismus. Zunächst sind M/MI und $(R/I)^n$ R/I Moduln. Seien $r \in R/I$ und $\overline{m_1}, \overline{m_2} \in M/IM$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(r\overline{m_1} + \overline{m_2}) &= \overline{\varphi}(\overline{rm_1 + m_2}) \\ &= \varphi(rm_1 + m_2) + I^n \\ &\overset{\varphi\ R\text{-Hom}}{=} r\varphi(m_1) + \varphi(m_2) + I^n \\ &= r\overline{\varphi(m_1)} + \overline{\varphi(m_2)} \\ &= r\overline{\varphi}(m_1) + \overline{\varphi}(m_2). \end{aligned}$$

• Z.z.: $\overline{\varphi}$ bijektiv. Es ist $\overline{\varphi}$ injektiv, da

$$\ker \overline{\varphi} = \{\overline{m} \in M/IM \mid \varphi(m) = I^n\} \overset{\varphi|_{IM}\text{ Bij.}}{=} \{\overline{m} \in M/IM \mid m \in IM\} = \{IM\} = \{0\}.$$

Sei $\overline{x} \in (R/I)^n$. Da φ Isomorphismus, ex. $m \in M$ mit $\varphi(m) = x$. Damit folgt

$$\overline{\varphi}(m + IM) = \varphi(m) + I^n = x + I^n = \overline{x}.$$

Also $\overline{\varphi}$ surjektiv.

Insgesamt ist $\overline{\varphi}$ also ein R/I-Moduliso.

□

Aufgabe 24. Es sei $S \coloneqq \{t+1, t^2+1\}$.

Beh.: S ist minimales ES von $\mathbb{Q}[t]$ als $\mathbb{Q}[t]$-Modul.

Beweis. Da $\mathbb{Q}[t]$ als $\mathbb{Q}[t]$-Modul betrachtet wird, sind die von Elementen $(a_i)_{i\in I} \in Q[t]^I$ erzeugten Untermodule von $\mathbb{Q}[t]$ gerade die von $(a_i)_{i\in I}$ erzeugten Ideale.

• Z.z.: S ES von $\mathbb{Q}[t]$ als $\mathbb{Q}[t]$-Modul. Es ist

$$\left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) \cdot (t+1) + \frac{1}{2} \cdot (t^2+1) = 1.$$

Also ist $(t+1, t^2+1) = (1)$. Damit folgt die Behauptung.

- Z.z.: S minimales ES. Sei $S_1 := \{t+1\}$. Da $\mathbb{Q}$ Kp. ist $\mathbb{Q}[t]$ HIR, also ist $t+1$ bis auf Assoziiertheit eind. bestimmter Erzeuger von $(t+1)$. Da $\deg(t+1) = 1 > 0 = \deg(1)$ und $\mathbb{Q}[t]$ nullteilerfrei, folgt $1 \notin (t+1)$, also S_1 kein ES.

  Analog für $S_2 := \{t^2+1\}$.

$\square$

Beh.: S ist keine Basis.

Beweis. Es ist
$$\left(\frac{1}{2}(t+1)\right)(t^2+1) + \left(t - \frac{1}{2}(t+1)^2\right)(t+1) = 0,$$
aber $\frac{1}{2}(t+1) \neq 0 \neq t - \frac{1}{2}(t+1)^2$, also $t+1$ und t^2+1 l.a. in $\mathbb{Q}[t]$ als $\mathbb{Q}[t]$-Modul, also S keine Basis. $\square$

Aufgabe 25. (a) Beh.: Sei R ein Ring und $I \neq 0$ ein Ideal in R. Dann sind äquivalent

(i) I von einem Nicht-Nullteiler erzeugtes Hauptideal

(ii) I frei als R-Modul

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Sei I Hauptideal mit $a \in R$ kein Nullteiler und $I = (a)$. $\{a\}$ ist Basis von I als R-Modul, denn

- $a \neq 0$, da $I \neq 0$ und a kein NT, also $\{a\}$ l.u.
- $\{a\}$ ES von I, da $I = (a)$. Also $\forall x \in I\ \exists r \in R$ mit $x = ra$.

(ii) $\implies$ (i): Sei I frei als R-Modul. Dann sei $(a_i)_{i\in J} \subseteq I$ Basis von I. $\forall i \in J$: $a_i \neq 0$ (sonst wäre $(a_i)_{i\in J}$ l.a.).

- Es ist $(a_i)_{i\in I} = \{a_1\}$, denn ang.: $\exists a_2 \in I$ mit $a_1 \neq a_2$ und $\{a_1, a_2\} \subseteq (a_i)_{i\in J}$. Dann ist, da R kommutativ, $a_1a_2 = a_2a_1$. Damit folgt $a_1a_2 - a_2a_1 = 0$, aber $a_1 \neq 0 \neq a_2$. Also sind $\{a_1, a_2\}$ linear abhängig $\lightning$.
- $a_1 \neq 0$ und a_1 kein NT, denn ang. $\exists c \in R \setminus \{0\}$ mit $a_1 r = 0 \implies a_1$ l.a.
- Da $\{a_1\}$ Basis von I als R-Modul, gilt $\forall a \in I\ \exists r \in R$ mit $a = r \cdot a_1$. Also folgt $I = (a_1)$.

$\square$

(b) Beh.: $(2, 1+\sqrt{-3})$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ist nicht frei als $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$-Modul.

Beweis. Wegen (a) g.z.z., dass $(2, 1+\sqrt{-3})$ kein Hauptideal in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$. Aus Aufg. 10 folgt, dass 2 und $1+\sqrt{-3}$ irreduzibel sind. Sei $\delta\colon \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \to \mathbb{N}_0$ außerdem die multiplikative Normabbildung aus Aufg. 10 mit $\delta(2) = \delta(1+\sqrt{-3}) = 4$ und $\delta(1) = 1$.

Ang.: $\exists r \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ mit $(r) = (2, 1+\sqrt{-3})$. Dann ex. $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ mit $2 = xr$ und $1+\sqrt{-3} = yr$. Da 2 und $1+\sqrt{-3}$ irreduzibel und $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]^\times = \{\pm 1\}$, folgt $x \in \{\pm 1\} \vee r \in \{\pm 1\}$.

- Falls $x \in \{\pm 1\}$, dann $r \in \{\pm 2\}$. Damit folgt $1+\sqrt{-3} \in \{\pm y \cdot 2\}$. Da $\{\pm 2\} \notin \mathbb{Z}[-3]^\times$, folgt $y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]^\times = \{\pm 1\}$. Also $1+\sqrt{-3} \triangleq 2$ $\lightning$.
- Falls $r \in \{\pm 1\}$, dann $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = (r) = (2, 1+\sqrt{-3})$. Dann ex. $a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ mit $1 = 2 \cdot a + (1+\sqrt{-3}) \cdot b$, also
$$1 = \delta(1) = \delta(2)\cdot\delta(a) + \delta(1+\sqrt{-3})\cdot\delta(b) = 4\underbrace{\delta(a)}_{\in\mathbb{N}_0} + 4\underbrace{\delta(b)}_{\in\mathbb{N}_0} \quad \lightning.$$

Also ist $(2, 1+\sqrt{-3})$ kein Hauptideal und damit wegen (a) nicht frei als $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ Modul. $\square$

(c) Wähle $M = R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ und $N = (2, 1+\sqrt{-3})$. N ist $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$-Untermodul von M, da N Ideal in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$-Modul M. Es ist $M = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, also M frei als $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$-Modul, aber $N = (2, 1+\sqrt{-3}) \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ wegen (b) nicht frei.