Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	$\sum$
Punkte						

Aufgabe 1. Für $k \in \mathbb{N}$ ist

$$f_k(x) := \begin{cases} x^k \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

definiert.

(a) Beh.: f_1 ist in $x_0 = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar.

Beweis. Da $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ beschränkt durch ± 1, gilt $\forall x \in \mathbb{R}^\times$

$$\left| x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |x|.$$

Sei $\epsilon > 0$ bel., dann wähle $\delta := \epsilon$. Dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}^\times$ mit $|x| < \delta$:

$$|f_1(0) - f_1(x)| = \left| x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |x| < \delta = \epsilon.$$

$\implies f_1$ in $x_0 = 0$ stetig.
Weiter gilt für $x_0 = 0$

$$D_h f_1(0) = \frac{f_1(0+h) - f_1(0)}{h} = \frac{h \cdot \sin(1/h)}{h} = \sin\left(\frac{1}{h}\right).$$

Nun sind offensichtlich $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $h_n := \frac{1}{2\pi n}$ und $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $l_n := \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ Nullfolgen, aber

$$\lim_{n\to\infty} D_{h_n} f_1(0) = \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} D_{l_n} f_1(0).$$

$\implies f_1$ in x_0 nicht differenzierbar. □

(b) Beh.: f_2 in $x_0 = 0$ differenzierbar, aber f_2' in $x_0 = 0$ nicht stetig.

Beweis. Es gilt

$$D_h f_2(x_0) = \frac{f_2(h)}{h} = \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = h \cdot \sin(1/h).$$

$\implies$ Analog zum Stetigkeitsbeweis in (a), folgt f_2 in x_0 differenzierbar.
$\implies \lim_{h\to 0} D_h f_2(x) = 0 = f_2'(0)$.
Für $x \neq 0$ folgt mit Ableitungsregeln direkt:

$$f_2'(x) = 2x \cdot \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := \frac{1}{2\pi n}$ folgt direkt $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 = x_0$, aber

$$f_2'(x_n) = 2 \cdot \frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n) - \cos(2\pi n) = -1 \neq 0 = f_2'(0).$$

$\implies f_2'$ nicht stetig in $x_0 = 0$. □

(c) Beh.: f_3 in $x_0 = 0$ nur einmal differenzierbar. in $x_0 = 0$.

Beweis. Für $x_0 = 0$ folgt direkt

$$D_h f_3(x_0) = \frac{f_3(h)}{h} = \frac{h^3 \cdot \sin(1/h)}{h} = h^2 \cdot \sin(1/h) \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Für $x \neq 0$ gilt mit Ableitungsregeln direkt:

$$f_3'(x) = 3x^2 \cdot \sin(1/x) - x \cdot \cos(1/x).$$

Damit folgt

$$\lim_{x\to 0} f_3'(x) = 0 = f'(0).$$

$\implies$ f_3' in $x_0 = 0$ stetig. Aber wegen

$$D_h f_3'(0) = \frac{3h^2\sin(1/h) - h\cos(1/h)}{h} = 3h\sin(1/h) - \cos(1/h).$$

$\implies$ f_3' in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, analog zu (a). □

Aufgabe 2. Sei $f\colon R_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

(a) Beh.: $f^{(k)}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \prod_{n=0}^{k-1}(2n-1)\cdot x^{\frac{1}{2}-k}$

Beweis. durch vollständige Induktion nach k.

I.A.: $k = 0$

$$f^{(0)}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^0 \cdot x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} = f(x).$$

I.S.: $k \to k+1$. Es ex. ein festes, aber bel. $k \in \mathbb{N}$, für das die Beh. gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) = f^{(k)\prime}(x) &\overset{\text{I.V.}}{=} \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^k \prod_{n=0}^{k-1}(2n-1)\cdot x^{\frac{1}{2}-k}\right)'(x) \\
&\overset{\text{Potenzregel}}{=} \left(\frac{1}{2}-k\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^k \prod_{n=0}^{k-1}(2n-1)\cdot x^{\frac{1}{2}-k-1} \\
&= -\frac{1}{2}(2k-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^k \prod_{n=0}^{k-1}(2n-1)\cdot x^{\frac{1}{2}-(k+1)} \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} \prod_{n=0}^{k}(2n-1)\cdot x^{\frac{1}{2}-(k+1)}.
\end{aligned}$$

□

(b) Mit (∗∗) folgt dann direkt aus (a)

$$f^{(k)}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)} \cdot x^{\frac{1}{2}-k}.$$

(c) Aus (a) und (b) folgt damit direkt

$$\begin{aligned}
T_\infty(x, x_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)k!} \cdot x_0^{\frac{1}{2}-k}(x-x_0)^k \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_0^{\frac{1}{2}-k}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)k!}(x-x_0)^k.
\end{aligned}$$

(d) Zunächst folgt aus (ii) direkt

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right) &\overset{\text{(ii)}}{=} (-1)^{k-1}\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(k+1-\frac{3}{2})} \\
&\overset{\text{(iii)}}{=} (-1)^{k-1}\frac{\pi}{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$\implies$

$$\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right) = (-1)^{k-1}\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)}$$

Eingesetzt in (i) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2^{k-1}}\prod_{n=0}^{k-1}(2n-1) &= (-1)^{k-1}\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)\sqrt{\pi}} \\ \implies \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\prod_{n=0}^{k-1}(2n-1) &= (-1)^{k}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)} \\ \implies \left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\prod_{n=0}^{k-1}(2n-1) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. (a) Mit $A := \left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}$ folgt

$$\ln A = \frac{1}{x}\cdot\ln\left(e^{3x}-5x\right).$$

Damit folgt

$$\frac{\ln(e^{3x}-5x)'}{x'} = \frac{1}{e^{3x}-5x}\left(3e^{3x}-5\right) \xrightarrow{x\to 0} -2.$$

Mit de l'Hospital folgt damit

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-2}.$$

(b) Analog zu (a) mit

$$\frac{\ln(e^{3x}-5x)'}{x'} = \frac{1}{e^{3x}-5x}\left(3e^{3x}-5\right) = \frac{3-\frac{5}{e^{3x}}}{1-5\frac{x}{e^{3x}}} \xrightarrow{x\to\infty} 3.$$

Damit folgt

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{3}.$$

(c) Hier folgt direkt

$$\frac{(5^x-2^x)'}{x'} = \frac{\ln(5)\cdot 5^x-\ln(2)2^x}{1} \xrightarrow{x\to 0} \ln(5)-\ln(2) \overset{\text{de l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{5^x-2^x}{x}.$$

(d) Abl. bedeutet hier, Zähler und Nenner seperat abgeleitet.

$$\frac{x-\sin(x)}{x^2} \xrightarrow{\text{Abl.}} \frac{1-\cos(x)}{2x} \xrightarrow{\text{Abl.}} \frac{\sin(x)}{2} \xrightarrow{x\to 0} 0.$$

de l'Hospital: $\implies \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\sin(x)}{x^2}\right) = 0.$

(e)

$$\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x^2} \xrightarrow{\text{Abl.}} \frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{2x} \xrightarrow{\text{Abl.}} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}+\sin x}{2} \xrightarrow{x\to 0} -\frac{1}{2}.$$

de l'Hospital: $\implies \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$

(f) Mit $y := \frac{1}{x}$ und $A := (1+y)^{\frac{1}{y}}$, folgt

$$\ln A = \frac{\ln(1+y)}{y} \xrightarrow{\text{Abl.}} \frac{1}{1+y} \xrightarrow{y\to\infty} 0.$$

Damit folgt mit de l'Hospital $\lim_{y\to\infty} A = 1$. Insgesamt ergibt sich damit

$$\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}\cdot(1+y)^{\frac{1}{y}}-\frac{e}{y} = 0.$$

Aufgabe 4. (a) Die Funktion ist konvex, d.h. die Bedingung $r'(m) = 0$ reicht bereits aus. Damit folgt

$$
\begin{aligned}
0 \stackrel{!}{=} r'(m) &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} 2(y_i - mx_i - b^*) \\
\implies m^* &= \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - b^* \sum_{i=1}^N x_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}.
\end{aligned}
$$

Mit $\xi := \sum_{i=1}^N x_i y_i$ und $\zeta := \sum_{i=1}^N x_i^2$ folgt

$$
m^* = \frac{\xi - b^* N\overline{x}}{\zeta}.
$$

Mit $b^* = \overline{y} - m\overline{x}$ folgt

$$
\begin{aligned}
m^* &= \frac{\xi - N(\overline{y} - m^*\overline{x})\overline{x}}{\zeta} \\
\implies m^* &= \frac{\xi - N\overline{xy}}{\zeta - N\overline{x}^2}.
\end{aligned}
$$

(b) Mit $f(x) = m^*x + b^*$ und der in (a) gezeigten Formel folgt mit dem Ansatz $f(x) = 0$, dass ab dem 32. Zettel niemand mehr abgibt.

Aufgabe 5. (a) Beh.: $f_n(x) := \sin\left(\frac{1}{n}x\right)$, $x \in [-\pi, \pi]$ ist gleichmäßig konvergent mit $f(x) = 0$.

Beweis. Der $\sin(\tau)$ hat auf $\tau \in [-\pi, \pi]$ genau zwei Extrema bei $\tau_1 = \frac{\pi}{2}$ und $\tau_2 = -\frac{\pi}{2}$. Für $n > 2$ gilt: $\frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$. Damit folgt $\forall x \in [-\pi, \pi]$: $\sin\left(\frac{1}{n}x\right) \le \sin\left(\frac{1}{n}\pi\right)$.

Sei nun $\epsilon > 0$ bel. Dann wähle $n_\epsilon := \left\lceil \frac{\pi}{\arcsin(\epsilon)} \right\rceil > 2$. Dann folgt $\forall x \in [-\pi, \pi]$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge n_\epsilon$:

$$
|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \left|\sin\left(\frac{1}{n}x\right)\right| \le \left|\sin\left(\frac{1}{n_\epsilon}\pi\right)\right| \le \left|\sin\left(\frac{1}{\frac{\pi}{\arcsin(\epsilon)}}\pi\right)\right| = \epsilon.
$$

$\implies f_n$ gleichmäßig konvergent. □

(b) Beh.: $f_n(x) := nx(1-x)^n$, $x \in [0, 1]$ ist punktweise konvergent mit $f(x) = 0$, aber nicht gleichmäßig konvergent.

Beweis. Sei $x \in [0, 1]$. Für $x = 0$ und $x = 1$ gilt $f_n(1) = f_n(0) = f(0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Für $x \in (0, 1)$ gilt

$$
\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(n+1)(1-x)}{n} = \frac{n + 1 - x(n+1)}{n}.
$$

Wähle nun $n_0 := \left\lceil \frac{1-x}{x} \right\rceil$. Dann gilt $\forall n > n_0$:

$$
x(n+1) > x\left(\frac{1-x}{x} + 1\right) = 1 \implies \frac{\overbrace{n + 1 - x(n+1)}^{<n}}{n} < 1.
$$

Damit ist $\forall n > n_0$ f_n streng monoton fallend. Da außerdem $f_n(x)$ nach unten beschränkt durch 0, gilt damit $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. $\implies$ f_n konvergiert punktweise gegen $f(x) = 0$.

Z.z.: f_n nicht gleichmäßig konvergent. $f_n(x)$ ist als Produkt von stetigen Funktionen stetig und nach Produktregel differenzierbar. Mit Produkt- und Potenzregel folgt demnach

$$
\begin{aligned}
f_n'(x) &= n\left[(1-x)^n - nx(1-x)^{n-1}\right] \\
&= n(1-x)^{n-1}\left[1 - x - nx\right] \\
f_n''(x) &= n^2\left[-(1-x)^{n-1} - (1-x)^{n-1} + x(n-1)(1-x)^{n-2}\right] \\
&= n^2\left(1-x\right)^{n-2}\left[-2 + x + xn\right].
\end{aligned}
$$

Für $\xi_n = \frac{1}{n+1}$ gilt

$$f_n'(\xi_n) = n\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n-1}\left[1 - \frac{1}{n+1} - \frac{n}{n+1}\right] = n\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n-1}\left[\frac{n+1-1-n}{n+1}\right] = 0$$

$$f_n''(\xi_n) = n^2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n-2}\left[-2 + \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\right] = \underbrace{n^2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n-2}}_{>0}\underbrace{\left[\frac{-n-1}{n+1}\right]}_{<0} < 0.$$

Damit folgt, f_n hat einen Hochpunkt bei $x = \xi_n$. Weiter gilt

$$f_n(\xi_n) = \frac{1}{n+1}n\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e}.$$

Sei nun $\frac{1}{2e} > \epsilon > 0$ beliebig. Dann ex. ein $N_0 \in \mathbb{N}$, s.d. gilt $\forall n > N_0$:

$$\left|\frac{1}{e} - f_n(\xi_n)\right| < \epsilon \implies |f(\xi_n)| + \epsilon > \left|\frac{1}{e}\right| \implies |f_n(\xi_n)| > \frac{1}{e} - \epsilon.$$

Sei nun $N_0 < n_\epsilon \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann wähle $x = \xi_{n_\epsilon}$. Damit folgt

$$|f_{n_\epsilon}(\xi_{n_\epsilon}) - f(\xi_{n_\epsilon})| = |f_{n_\epsilon}(\xi_{n_\epsilon})| > \frac{1}{e} - \epsilon > 2\epsilon - \epsilon = \epsilon.$$

$\implies f_n$ nicht gleichmäßig konvergent. $\square$