

0.1 Konvergenz in $\mathbb{C}$

Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen ($z_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$) konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$, falls $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$, s.d. $|z_n - z| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$

Genauso wird die Beschränktheit und Begriff der C.F. übertragen.

Aus Definitionen:

$$|z| := \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2}.$$

und der Ungleichung:

$$\max(|x|, |y|) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

folgt:

1. $z_n \rightarrow z, n \rightarrow \infty$ in $\mathbb{C} \iff \operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z)$ und $\operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$
2. $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine C.F. in $\mathbb{C} \iff$
 $(\operatorname{Re}(z_n))_n$ und $(\operatorname{Im}(z_n))_n$ sind C.F. in $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{C}$ ist vollständig, d.h. jede C.F. in $\mathbb{C}$ ist konvergent.
4. Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beispiel 1. 1. $\frac{1+i(n+1)}{n} = \frac{1}{n} + i\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow i, n \rightarrow \infty$

$$2. \quad z_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n = \left(\frac{i}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{i}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$$

$$|z_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

$$3. \quad q^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \quad \forall q \in \mathbb{C} \text{ mit } |q| < 1.$$

0.2 Unendliche Summe („Reihen“)

Definition 1. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Wir betrachten die Folge der n -ten Partialsumme $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch:

$$s_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert (divergiert), wenn die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert (divergiert).

Im Fall von Konvergenz bezeichnet:

$$s_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

die Summe oder den Wert der Reihe.

Bemerkung 1. Man kann auch Reihen $\sum_{k=l}^{\infty} a_k$ mit $l \in \mathbb{Z}$ betrachten.

Beispiel 2 (Geometrische Reihe).

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert genau für alle $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Beweis. Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}.$$

Für $|q| < 1$ gilt $|q|^{n+1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

$$\implies s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \rightarrow \frac{1}{1 - q} \quad \text{für } |q| < 1.$$

Bleibt zu zeigen: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergent für $|q| \geq 1$.

Angenommen $\exists q \in \mathbb{C}$ mit $|q| \geq 1$ und $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Dann

$$|q|^{n+1} = \underbrace{|s_{n+1} - s_n|}_{\rightarrow s_*}.$$

Widerspruch, da $|q|^{n+1} \geq 1$ für $|q| \geq 1$

□

Lemma 1. Ist $\sum_k^{\infty} a_k$ konvergent, dann ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Beweis. $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n \rightarrow s_{\infty} - s_{\infty} = 0, n \rightarrow \infty$

□

Bemerkung 2. Die Eigenschaft von $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge zu sein, reicht nicht für die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ aus!

Beispiel 3 (Harmonische Reihe).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{ist strikt divergent.}$$

Beweis. Folge der Partialsummen ist unbeschränkt:

$$\begin{aligned} S_{2^m} &= \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \\ &= \underbrace{\frac{1}{1}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^m}}_{\geq 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2}} \geq \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k.$$

a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + \dots = 0.$$

b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 = 1$$

c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}.$$

Alles Falsch (Kostina: „Alles Schrot!“), weil $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ divergent.

0.2.1 Konvergenzkriterien

Die Konvergenz einer Reihe ist nichts anderes als die Konvergenz der Folge der Partialsummen.

Satz 1. 1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_{\infty} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_{\infty}.$$

 $\implies$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda a_{\infty} + \mu b_{\infty} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

2. Ist $a_k \in \mathbb{R}$ mit $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ dann gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\iff (\sum_{k=1}^n a_k)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt.

Beweis. (1) folgt aus der linearen Kombination von Folgen.

(2) Falls $a_k \geq 0 \implies$ Folge $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

Für solche Folgen gilt: Konvergenz $\iff$ Beschränktheit □

Satz 2 (Leibniz-Kriterium). Ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende reelle Nullfolge, so ist die alternierende Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$$

konvergent mit folgender Abschätzung:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Aus Voraussetzungen: $a_k \geq 0, s_n := \sum_{k=1}^n a_k$.

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} \stackrel{a_{2n} \geq a_{2n+1}}{\geq} s_{2n-1}.$$

Folge mit ungeraden Indizes: $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \dots$

$$s_{2n} = s_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n} \leq s_{2n-2}.$$

Folge mit geraden Indizes: $\dots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$

$$s_{2n} > s_{2n+1} \quad (s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1})$$

$$s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

$$s_1 \geq s_3 \leq s_5 \leq \dots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$$

$\implies [s_{2n+1}, s_{2n}]$ bilden eine Intervallschachtelung, d.h.

$$\exists s_{\infty} = \bigcap_{k=1}^{\infty} [s_{2k+1}, s_{2k}].$$

$$s_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$$

$$s_{2n+1} \leq s_{\infty} \leq s_{2n}.$$

Damit gilt $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq s_{\infty} - s_{2n+1} \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1}.$$

und

$$0 \geq s_{\infty} - s_{2n} \geq s_{2n+1} - s_{2n} = -a_{2n+1} \geq -a_{2n}.$$

$\implies$

$$0 \leq |s_{\infty} - s_n| \leq a_n \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

und

$$\left| \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}_{s_{\infty}} - \sum_{k=1}^n a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq a_n.$$

□

Beispiel 5 („Alternierende harmonische Reihe“).

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

ist konvergent

Definition 2. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispiel 6. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ ist konvergent nach Leibniz Kriterium, aber nicht absolut konvergent, weil $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Satz 3. Aus absoluter Konvergenz einer Reihe folgt deren Konvergenz.

Beweis. Sei $\sum_k a_k$ absolut konvergent, d.h. $\sum_k |a_k|$ konvergiert.

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k, t_n := \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Dann gilt für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$.

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| = t_m - t_n = |t_m - t_n|.$$

Da $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\implies (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist C.F.

Aus $|s_m - s_n| \leq |t_m - t_n| < \epsilon$

$\implies (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist auch C.F. in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$

$\implies \sum_k a_k$ konvergiert.

□