

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	Σ
Punkte					

Aufgabe 1. Für $x, y \in \mathbb{R}$ seien Abbildungen $d_i: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 5$ definiert:

(a) $d_1(x, y) = (x - y)^2$ ist keine Metrik, denn

$$d(1, 3) = 4 > 2 = 1 + 1 = d(1, 2) + d(2, 3).$$

(b) $d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ ist eine Metrik denn $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

(M1) $d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|} \geq 0$ und

$$d_2(x, y) = 0 \iff \sqrt{|x - y|} = 0 \iff |x - y| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y.$$

(M2) $d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|} = \sqrt{|y - x|} = d_2(y, x)$

(M3) Es gilt

$$|x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| \leq |x - y| + 2\sqrt{|x - y||y - z|} + |y - z|.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} |x - z| &\leq |x - y| + 2\sqrt{|x - y||y - z|} + |y - z| \\ \stackrel{\sqrt{\cdot} \geq 0}{\iff} d_2(x, z) &= \sqrt{|x - z|} \leq \sqrt{|x - y|} + \sqrt{|y - z|} = d_2(x, y) + d_2(y, z). \end{aligned}$$

(c) $d_3(x, y) = |x^2 - y^2|$ ist keine Metrik, denn

$$d(-1, 1) = |(-1)^2 - 1^2| = 0.$$

aber $-1 \neq 1$ in $\mathbb{R}$.

(d) $d_4(x, y) = |x - 2y|$ ist keine Metrik, denn

$$d_4(3, 2) = |3 - 2 \cdot 2| = 1 \neq 4 = |2 - 2 \cdot 3| = d_4(2, 3).$$

(e) $d_5(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$ ist eine Metrik, denn $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

(M1) $d_5(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \geq 0$ und

$$d_5(x, y) = 0 \iff \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} = 0 \iff |x - y| = 0 \iff x = y.$$

(M2) $d_5(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} = \frac{|y - x|}{1 + |y - x|} = d_5(y, x).$

(M3) Sei $d := \max\{|x - y|, |x - z|, |y - z|\}$. Falls $d = |x - z|$, dann ist

$$\frac{|x - z|}{1 + |x - z|} = \frac{|x - z|}{1 + d} \leq \frac{|x - y|}{1 + d} + \frac{|y - z|}{1 + d} \leq \underbrace{\frac{|x - y|}{1 + |x - y|}}_{\leq d} + \underbrace{\frac{|y - z|}{1 + |y - z|}}_{\leq d}.$$

Falls $d \neq |x - z|$. Dann sei O.E. $d = |x - y|$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x - z| &\leq |x - y| \\ \iff |x - z| + |x - y| \cdot |x - z| &\leq |x - y| + |x - y| \cdot |x - z| \\ \iff |x - z|(1 + |x - y|) &\leq |x - y|(1 + |x - z|) \\ \iff \frac{|x - z|}{1 + |x - z|} &\leq \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \end{aligned}$$

Also insbesondere

$$\implies \frac{|x - z|}{1 + |x - z|} \leq \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} + \underbrace{\frac{|y - z|}{1 + |y - z|}}_{\geq 0}.$$

Insgesamt folgt

$$d_5(x, z) \leq d_5(x, y) + d_5(y, z).$$

Aufgabe 2. Sei (X, d) ein metrischer Vektorraum über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Die Metrik $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die gegebenen Eigenschaften.

Beh.: $\|x\|_d := d(x, 0) \forall x \in X$ ist eine Norm auf X .

Beweis. Seien $x, y \in X$ und $\alpha \in K$.

$$(N1) \quad \|x\|_d = d(x, 0) \stackrel{d \text{ Metrik}}{\geq} 0 \\ x = 0 \stackrel{d \text{ Metrik}}{\iff} d(x, 0) = 0 \iff \|x\|_d = 0$$

$$(N2) \quad \|\alpha x\|_d = d(\alpha x, 0) \stackrel{E2}{=} |\alpha| d(x, 0) = |\alpha| \|x\|_d$$

(N3) Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= d(x + y, 0) \\ &\stackrel{E1}{=} d(y, -x) \\ &\stackrel{d \text{ Metrik}}{=} d(-x, y) \\ &\stackrel{d \text{ Metrik}}{\leq} d(-x, 0) + d(0, y) \\ &\stackrel{E2}{=} d(x, 0) + d(y, 0) \\ &= \|x\|_d + \|y\|_d. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3. Seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

(a) Beh.: Für $a, b \geq 0$ gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Beweis. Definiere

$$f(t) := (a^p)^t \cdot (b^q)^{1-t} = e^{(p \ln a - q \ln b)t}$$

Es folgt

$$f''(t) = \underbrace{(p \ln a - q \ln b)^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{f(t)}_{\geq 0}.$$

Also ist $f(t)$ konvex. Es ist mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. Mit $\lambda = \frac{1}{p}, x = 1$ und $y = 0$ folgt damit

$$ab = a^{\frac{1}{p} \cdot p} b^{q \cdot (1 - \frac{1}{p})} = f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p} f(1) + \left(1 - \frac{1}{p}\right) f(0) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

(b) Beh.: Für $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Beweis. Es sei $\|a\|_p := (\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ und $\|b\|_q := (\sum_{i=1}^n |b_i|^q)^{\frac{1}{q}}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|a\|_p \cdot \|b\|_q} \sum_{i=1}^n |a_i b_i| &= \sum_{i=1}^n \left| \frac{a_i}{\|a\|_p} \right| \left| \frac{b_i}{\|b\|_q} \right| \\ &\stackrel{\text{Young}}{\leq} \sum_{i=1}^n \frac{|a_i|^p}{p \|a\|_p^p} + \sum_{i=1}^n \frac{|b_i|^q}{q \|b\|_q^q} \\ &= \frac{1}{p} \frac{1}{\sum_{i=1}^n |a_i|^p} \sum_{i=1}^n |a_i|^p + \frac{1}{q} \frac{1}{\sum_{i=1}^n |b_i|^q} \sum_{i=1}^n |b_i|^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n |a_i b_i| &\leq \|a\|_p \cdot \|b\|_q. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 4. Sei

$$B_1 := \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$$

die abgeschlossene Einheitskugel.

(a) Beh.: Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$f_n(x) := \begin{cases} -2^{2n+4} \left(x - \frac{3}{2^{n+2}}\right)^2 + 1 & x \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erfüllt die Eigenschaften.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Zunächst ist f_n stetig, denn: $\forall x \in (\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n})$ ist f_n als Polynom stetig. Für $x \in [0, 1] \setminus [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ ist f_n als konstante Funktion stetig. Außerdem gilt

$$\lim_{x \nearrow \frac{1}{2^{n+1}}} f_n(x) = 0 = -\frac{2^{2n+4}}{2^{2n+4}} + 1 = -2^{2n+4} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{3}{2^{n+2}}\right)^2 + 1 = f_n\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \lim_{x \searrow \frac{1}{2^{n+1}}} f_n(x).$$

Analog für $x = \frac{1}{2^n}$.

Weiter ist $\|f_n\|_\infty = 1$, denn für $x \in [0, 1] \setminus (\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n})$ ist $f_n(x) = 0$ und für $x \in [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ ist der Scheitelpunkt der Parabel mit $x_{\max} = \frac{3}{2^{n+2}}$ als Maximum mit $f(x_{\max}) = 1$ gegeben.

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$ und $x \in [0, 1]$. O.E. sei $m > n$. Falls $x \in (\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n})$, dann ist $f_m(x) = 0$, denn $m > n \Rightarrow m \geq n+1 \Rightarrow \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Falls $x \in (\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^m})$, ist analog $f_n(x) = 0$.

Sonst gilt $f_n(x) = f_m(x) = 0$.

Damit folgt $f_n(x) f_m(x) = 0$. □

(b) Beh.: Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den in (a) gegebenen Eigenschaften, hat keine konvergente Teilfolge.

Beweis. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B_1$ mit $\|f_n\|_\infty = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $f_n(x) f_m(x) = 0 \ \forall x \in [0, 1], n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$.

Sei weiter $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ beliebige Funktion und $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Teilfolge.

Ang.: $\|f_{n_k} - f\|_\infty \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

Ang.: $\|f\|_\infty \neq 1$. Dann sei $\epsilon = \frac{|1 - \|f\|_\infty|}{2}$. Dann gilt $\forall k \in \mathbb{N} \ \|f_{n_k}\|_\infty = 1$, also folgt

$$\|f_{n_k} - f\| \geq |1 - \|f\|_\infty| > \epsilon \quad \nexists.$$

Damit ist $\|f\|_\infty = 1$. Sei nun $x_{\max} \in [0, 1]$ beliebig mit $f(x_{\max}) = 1$.

Falls $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt $f_{n_k}(x_{\max}) = 0 \Rightarrow \|f_{n_k} - f\| \geq 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Falls $\exists k \in \mathbb{N}$ mit $f_{n_k}(x_{\max}) = 1$: Dann gilt $\forall m > k$:

$$f_{n_k}(x_{\max}) \cdot f_{n_m}(x_{\max}) = 0 \stackrel{\mathbb{R} \text{ nullteilerfrei}}{\Rightarrow} f_{n_m}(x_{\max}) = 0 \Rightarrow \|f - f_{n_m}\|_\infty \geq 1 \quad .$$

Also konvergiert f_{n_k} nicht gegen f . □