

|         |    |    |    |          |
|---------|----|----|----|----------|
| Aufgabe | A2 | A3 | A4 | $\Sigma$ |
| Punkte  |    |    |    |          |

**Aufgabe 2.** In Zylinderkoordinaten ist

$$\vec{x} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z \implies \dot{\vec{x}} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z \implies \dot{\vec{x}}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2.$$

Damit folgt

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V(\rho)$$

Damit folgt für die verallgemeinerten Impulse

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} &= m \dot{\rho} =: p_\rho \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m \rho^2 \dot{\varphi} =: p_\varphi \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= m \dot{z} =: p_z \end{aligned}$$

Damit folgt die Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} H(\vec{p}, \vec{q}) &= \frac{p_\rho^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{m \rho^2} + \frac{p_z^2}{m} - \frac{m}{2} \left( \frac{p_\rho^2}{m^2} + \rho^2 \frac{p_\varphi^2}{m^2 \rho^4} + \frac{p_z^2}{m^2} \right) + V(\rho) \\ &= \frac{2}{m} \left( p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2 \right) + V(\rho) \end{aligned}$$

Als Erhaltungsgrößen folgen damit sofort

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \implies \frac{d}{dt} p_\varphi = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 0 \implies \frac{d}{dt} p_z = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= 0 \implies \frac{d}{dt} H = 0 \implies E = \text{konst.} \end{aligned}$$

**Aufgabe 3** (Brachistochrone).

$$T[f] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_E} \sqrt{\frac{1 + [f'(x)]^2}{f(x)}} dx.$$

a) Die Lagrange Funktion und der verallgemeinerte Impuls sind damit gegeben als

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sqrt{1 + f'^2}}{\sqrt{2g} f} \\ p &= \frac{\partial L}{\partial f'} = \frac{f'}{\sqrt{2g} f (1 + f'^2)} \end{aligned}$$

Damit folgt für die Hamilton-Funktion, ausgedrückt durch  $f'$  statt  $p$

$$\begin{aligned} H(f, f') &= \frac{f'^2}{\sqrt{2g} f (1 + f'^2)} - \frac{\sqrt{1 + f'^2}}{\sqrt{2g} f} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2g} f (1 + f'^2)} \end{aligned}$$

Wegen  $\frac{\partial H}{\partial t}$ , folgt für die Konstante  $E > 0$

$$E := -H = \frac{1}{\sqrt{2g} f (1 + f'^2)}.$$

Damit folgt als DGL

$$E \sqrt{2g} f (1 + f'^2) = 1.$$

b) Mit  $f(\varphi) = \frac{1-\cos\varphi}{4gE^2}$  und  $x(\varphi) = \frac{\varphi-\sin\varphi}{4gE^2}$  folgt

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}.$$

Damit folgt

$$E \sqrt{2g \frac{1-\cos\varphi}{4gE^2} \left(1 + \frac{\sin^2\varphi}{(1-\cos\varphi)^2}\right)} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2} + \frac{1+\cos\varphi}{2}} = 1.$$

**Aufgabe 4** (Verständnisfragen). a) Koordinaten von denen die Lagrange Funktion nicht explizit abhängt, heißen zyklisch. Dann ist der kanonisch konjugierte Impuls zeitlich konstant. Ihr Nullpunkt kann beliebig verschoben werden, ohne die Bewegungsgleichungen zu ändern:

$$q_i \rightarrow q_i + c.$$

b) Das Hamilton'sche Prinzip besagt, dass die Wirkung entlang der wirklichen Bahn eines Massenpunkts zwischen zwei Punkten extremal wird. Die Wirkung ist das Zeitintegral über die Lagrange Funktion:

$$\delta S[q(t)] = \delta \left[ \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt \right] = 0.$$

c) Nein. Die Lagrange-Funktion kann um die Zeitableitung einer beliebigen Funktion  $f(q, t)$  ergänzt werden

$$L \rightarrow L + \frac{df(q, t)}{dt},$$

denn dadurch ändert sich die Wirkung nur um einen konstanten Term, der bei der Variation verschwindet. Deshalb bleiben die Bewegungsgleichungen unverändert.