

Aufgabe	A22	A23	A24	A25	Σ
Punkte					

Aufgabe 22. Im Folgenden seien freie Stellen in Matrizen 0.

- (a) Aus Aufg. 17 folgt $c_1(A) = c_2(A) = 1$, $c_3(A) = t - 2$ und $c_4(A) = (t + 1)(t - 2)^2$. Damit folgen die Weierstraßteiler $h_1 = t - 2$, $h_2 = t + 1$ und $h_3 = (t - 2)^2$. Damit folgt

$$A \approx B_{h_1, h_3, h_2} \approx \begin{pmatrix} J(2, 1) & & \\ & J(2, 2) & \\ & & J(-1, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & 0 & \\ & 1 & 2 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Aus Aufg. 20 folgen direkt die Weierstraßteiler $h_1 = t + 1$, $h_2 = t$, $h_3 = t + 1$, $h_4 = t^2$, $h_5 = (t + 1)^3$. Damit folgt

$$A \approx B_{h_2, h_4, h_1, h_3, h_5} \approx \begin{pmatrix} J(0, 1) & & & & \\ & J(0, 2) & & & \\ & & J(-1, 1) & & \\ & & & J(-1, 1) & \\ & & & & J(-1, 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & 0 & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \\ & & & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & -1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 23. Seien R ein Ring, $I \subseteq R$ Ideal und M ein R -Modul.

Äquivalenzklassen bezügl. beliebiger Äquivalenzrelationen seien im folgenden mit $\bar{\cdot}$ bezeichnet. Aus dem Argument ist immer klar, welche Äquivalenzrelation gemeint ist.

- (a) Beh.: M/IM ist mit der natürlichen Addition und der angegebenen skalaren Mult. R/I -Modul.

Beweis. Die skalare Multiplikation sei mit $(*)$ bezeichnet.

$$R/I \times M/IM \rightarrow M/IM \\ (\bar{a}, \bar{m}) \mapsto \bar{a} \cdot \bar{m} := \overline{a \cdot m} \quad (*).$$

Zunächst zu zeigen, dass $(*)$ wohldefiniert ist. Dazu seien $a, b \in R$ und $x, y \in M$ mit $a + I = b + I$ und $x + IM = y + IM$.

- Zunächst ist ax bzw. by wohldefiniert, da M R -Modul.
- Es ist $x - y \in IM$, also $ax - ay = \underbrace{a}_{\in R} \underbrace{(x - y)}_{\in IM}$. Da IM R -Untermodul von M , folgt $a(x - y) \in IM$ und damit $\overline{ax} = \overline{ay}$.
- Es ist $a - b \in I$, also $ax - bx = \underbrace{(a - b)}_{\in I} \underbrace{x}_{\in M} \in IM$. Damit folgt $\overline{ax} = \overline{bx}$.

(M1) M/IM ist nach VL R -Modul, da IM R -Untermodul von M , also insbesondere abelsche Gruppe: $(M/IM, +, IM)$.

(M2) Seien $\bar{a}, \bar{b} \in R/I$ und $\bar{x}, \bar{y} \in M/IM$. Damit folgt

$$(\bar{a} + \bar{b})\bar{x} = \overline{(a + b)x} \stackrel{(*)}{=} \overline{ax + bx} \stackrel{M \text{ } R\text{-Modul}}{=} \overline{ax} + \overline{bx} \stackrel{(*)}{=} \bar{a}\bar{x} + \bar{b}\bar{x}.$$

Der Rest lässt sich analog nachrechnen.

□

- (b) Beh.: Ist $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi: M \rightarrow R^n$ ein R -Modulisomorphismus, dann ist $\varphi|_{IM}: IM \rightarrow I^n$ eine Bijektion (i) und φ induziert einen R/I -Moduliso. $\bar{\varphi}: M/IM \rightarrow (R/I)^n$ (ii).

Beweis. (i) • Z.z.: $\varphi|_{IM}$ wohldefiniert. Sei $m \in IM$ dann ex. Indexmenge J und $(a_i)_{i \in J} \in I^{(J)}$ und $(m_i)_{i \in J} \in M^{(J)}$ mit

$$m = \sum_{i \in J} a_i m_i \implies \varphi(m) \stackrel{\varphi R\text{-Hom}}{=} \sum_{i \in J} \underbrace{a_i}_{\in I} \underbrace{\varphi(m_i)}_{\in R^n} \in I^n \quad (\text{da } I \text{ Ideal}).$$

- Sei $x \in I^n$. Z.z.: $\varphi^{-1}(x) \in IM$. Es ex. $(a_i)_{i=1}^n \in I^n$ mit

$$x = \sum_{i=1}^n a_i e_i \implies \varphi^{-1}(x) \stackrel{\varphi^{-1} R\text{-Hom}}{=} \sum_{i=1}^n \underbrace{a_i}_{\in I} \underbrace{\varphi^{-1}(e_i)}_{\in M} \in IM.$$

Also φ_{IM} surjektiv.

- Da φ Iso, inbes. bijektiv, ist $\varphi|_{IM}$ injektiv.

Damit folgt also $\varphi|_{IM}$ bijektiv.

(ii) Definiere $\bar{\varphi}: M/IM \rightarrow (R/I)^n = R^n/I^n, m + IM \mapsto \varphi(m) + I^n$.

- Z.z.: $\bar{\varphi}$ wohldefiniert. Seien $m_1, m_2 \in M$ mit $m_1 = m_2$. Dann folgt $m_1 - m_2 \in IM$. Also ex. ein $(a_i)_{i \in J} \in I^{(J)}$ und $(m_i)_{i \in J} \in M^{(J)}$ mit $m_1 - m_2 = \sum_{i \in J} a_i m_i$. Damit folgt

$$\varphi(m_1) - \varphi(m_2) = \varphi(m_1 - m_2) \stackrel{\varphi R\text{-Hom}}{=} \sum_{i \in J} \underbrace{a_i}_{\in I} \underbrace{\varphi(m_i)}_{\in R^n} \in I^n.$$

Also ist $\varphi(m_1) + I^n = \varphi(m_2) + I^n$, also $\bar{\varphi}$ wohldefiniert.

- Z.z.: $\bar{\varphi}$ R/I -Homomorphismus. Zunächst sind M/IM und $(R/I)^n$ R/I Moduln. Seien $r \in R/I$ und $\bar{m}_1, \bar{m}_2 \in M/IM$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(r\bar{m}_1 + \bar{m}_2) &= \bar{\varphi}(\overline{rm_1 + m_2}) \\ &= \varphi(rm_1 + m_2) + I^n \\ &\stackrel{\varphi R\text{-Hom}}{=} r\varphi(m_1) + \varphi(m_2) + I^n \\ &= \overline{r\varphi(m_1) + \varphi(m_2)} \\ &= \overline{r\varphi(m_1)} + \overline{\varphi(m_2)} \\ &= r\bar{\varphi}(m_1) + \bar{\varphi}(m_2). \end{aligned}$$

- Z.z.: $\bar{\varphi}$ bijektiv. Es ist $\bar{\varphi}$ injektiv, da

$$\ker \bar{\varphi} = \{\bar{m} \in M/IM \mid \varphi(m) \in I^n\} \stackrel{\varphi|_{IM} \text{ Bij.}}{=} \{\bar{m} \in M/IM \mid m \in IM\} = \{IM\} = \{0\}.$$

Sei $\bar{x} \in (R/I)^n$. Da φ Isomorphismus, ex. $m \in M$ mit $\varphi(m) = x$. Damit folgt

$$\bar{\varphi}(m + IM) = \varphi(m) + I^n = x + I^n = \bar{x}.$$

Also $\bar{\varphi}$ surjektiv.

Insgesamt ist $\bar{\varphi}$ also ein R/I -Moduliso. □

Aufgabe 24. Es sei $S := \{t + 1, t^2 + 1\}$.

Beh.: S ist minimales ES von $\mathbb{Q}[t]$ als $\mathbb{Q}[t]$ -Modul.

Beweis. Da $\mathbb{Q}[t]$ als $\mathbb{Q}[t]$ -Modul betrachtet wird, sind die von Elementen $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{Q}[t]^I$ erzeugten Untermodule von $\mathbb{Q}[t]$ gerade die von $(a_i)_{i \in I}$ erzeugten Ideale.

- Z.z.: S ES von $\mathbb{Q}[t]$ als $\mathbb{Q}[t]$ -Modul. Es ist

$$\left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) \cdot (t + 1) + \frac{1}{2} \cdot (t^2 + 1) = 1.$$

Also ist $(t + 1, t^2 + 1) = (1)$. Damit folgt die Behauptung.

- Z.z.: S minimales ES. Sei $S_1 := \{t + 1\}$. Da $\mathbb{Q}$ Kp. ist $\mathbb{Q}[t]$ HIR, also ist $t + 1$ bis auf Assoziiiertheit eind. bestimmter Erzeuger von $(t + 1)$. Da $\deg(t + 1) = 1 > 0 = \deg(1)$ und $\mathbb{Q}[t]$ nullteilerfrei, folgt $1 \notin (t + 1)$, also S_1 kein ES.

□

Beh.: S ist keine Basis.

Beweis. Es ist

$$\left(\frac{1}{2}(t+1)\right)(t^2+1) + \left(t - \frac{1}{2}(t+1)^2\right)(t+1) = 0,$$

aber $\frac{1}{2}(t+1) \neq 0 \neq t - \frac{1}{2}(t+1)^2$, also $t+1$ und t^2+1 l.a. in $Q[t]$ als $Q[t]$ -Modul, also S keine Basis. □

Aufgabe 25. (a) Beh.: Sei R ein Ring und $I \neq 0$ ein Ideal in R . Dann sind äquivalent

- (i) I von einem Nicht-Nullteiler erzeugtes Hauptideal
- (ii) I frei als R -Modul

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Sei I Hauptideal mit $a \in R$ kein Nullteiler und $I = (a)$. $\{a\}$ ist Basis von I als R -Modul, denn

- $a \neq 0$, da $I \neq 0$ und a kein NT, also $\{a\}$ l.u.
- $\{a\}$ ES von I , da $I = (a)$. Also $\forall x \in I \exists r \in R$ mit $x = ra$.

(ii) $\implies$ (i): Sei I frei als R -Modul. Dann sei $(a_i)_{i \in J} \subseteq I$ Basis von I . $\forall i \in J: a_i \neq 0$ (sonst wäre $(a_i)_{i \in J}$ l.a.).

- Es ist $(a_i)_{i \in I} = \{a_1\}$, denn ang.: $\exists a_2 \in I$ mit $a_1 \neq a_2$ und $\{a_1, a_2\} \subseteq (a_i)_{i \in J}$. Dann ist, da R kommutativ, $a_1 a_2 = a_2 a_1$. Damit folgt $a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0$, aber $a_1 \neq 0 \neq a_2$. Also sind $\{a_1, a_2\}$ linear abhängig $\nexists$.
- $a_1 \neq 0$ und a_1 kein NT, denn ang. $\exists c \in R \setminus \{0\}$ mit $a_1 c = 0 \implies a_1$ l.a.
- Da $\{a_1\}$ Basis von I als R -Modul, gilt $\forall a \in I \exists r \in R$ mit $a = r \cdot a_1$. Also folgt $I = (a_1)$.

□

(b) Beh.: $(2, 1 + \sqrt{-3})$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ist nicht frei als $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ -Modul.

Beweis. Wegen (a) g.z.z., dass $(2, 1 + \sqrt{-3})$ kein Hauptideal in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$. Aus Aufg. 10 folgt, dass 2 und $1 + \sqrt{-3}$ irreduzibel sind. Sei $\delta: \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \rightarrow \mathbb{N}_0$ außerdem die multiplikative Normabbildung aus Aufg. 10 mit $\delta(2) = \delta(1 + \sqrt{-3}) = 4$ und $\delta(1) = 1$.

Ang.: $\exists r \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ mit $(r) = (2, 1 + \sqrt{-3})$. Dann ex. $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ mit $2 = xr$ und $1 + \sqrt{-3} = yr$. Da 2 und $1 + \sqrt{-3}$ irreduzibel und $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]^\times = \{\pm 1\}$, folgt $x \in \{\pm 1\} \vee r \in \{\pm 1\}$.

- Falls $x \in \{\pm 1\}$, dann $r \in \{\pm 2\}$. Damit folgt $1 + \sqrt{-3} \in \{\pm y \cdot 2\}$. Da $\{\pm 2\} \not\subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]^\times$, folgt $y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]^\times = \{\pm 1\}$. Also $1 + \sqrt{-3} \stackrel{\Delta}{=} 2 \nexists$.
- Falls $r \in \{\pm 1\}$, dann $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = (r) = (2, 1 + \sqrt{-3})$. Dann ex. $a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ mit $1 = 2 \cdot a + (1 + \sqrt{-3}) \cdot b$, also

$$1 = \delta(1) = \delta(2) \cdot \delta(a) + \delta(1 + \sqrt{-3}) \cdot \delta(b) = \underbrace{4\delta(a)}_{\in \mathbb{N}_0} + \underbrace{4\delta(b)}_{\in \mathbb{N}_0} \nexists.$$

Also ist $(2, 1 + \sqrt{-3})$ kein Hauptideal und damit wegen (a) nicht frei als $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ Modul. □

(c) Wähle $M = R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ und $N = (2, 1 + \sqrt{-3})$. N ist $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ -Untermodule von M , da N Ideal in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ -Modul M . Es ist $M = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, also M frei als $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ -Modul, aber $N = (2, 1 + \sqrt{-3}) \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ wegen (b) nicht frei.